Pojem rovnice a nerovnice

Nech ***$V_1(x)$*** a ***$V_2(x)$*** sú ***výrazy s premennou*** ***$x \in O$*** (O je dohodnutá – stanovená množina čísel ***N, Z, Q, R***).

Zápis $V_1(x) = V_2(x)$ [$V_1(x) > V_2(x)$, $V_1(x) \geq V_2(x)$, $V_1(x) < V_2(x)$, $V_1(x) \leq V_2(x)$]

nazývame ***rovnica*** (***nerovnica***) ***s neznámou x***.

Nech ***D*** je množina $\forall x \in O$, pre ktoré sú výrazy ***$V_1(x)$*** a ***$V_2(x)$*** ***definované.*** Potom platí: $D \subset O$.

Množinu ***O*** nazývame ***obor neznámej*** a množinu ***D*** ***definičný obor rovnice***.

Riešiť rovnicu (nerovnicu) znamená určiť množinu $\forall x \in D$, dosadením ktorých do príslušnej rovnice (nerovnice) dostaneme ***pravdivý výrok***. Danú konštantu – číslo nazývame ***riešenie – koreň*** rovnice (nerovnice). Množinu ***všetkých riešení*** rovnice (nerovnice) nazývame **množina koreňov** alebo ***obor pravdivosti*** a túto množinu označujeme **K**. Platí: $K \subset D \subset O$

Ak má rovnica (nerovnica) v množine D ***aspoň jeden koreň***, nazýva sa ***riešiteľná v D***, v opačnom prípade je ***neriešiteľná v D***. Riešiteľnosť rovnice je závislá od množiny D.

Príklad:

Určte množiny O, D, K pre:

a) Riešte v **Q**: $\frac{15}{x-4} = -3$ ... O = Q, D = Q - {4}, $K_Q = \{-1\}$

b) Riešte v **N**: $\frac{15}{x-4} = -3$ ... O = N, D = N - {4}, $K_N = \{\ \} = \varnothing$

Množina ***K*** sa určuje obvykle riešením, pri ktorom využívame niektoré matematické operácie, tzv. ***úpravy***.

Č.	***Úprava rovnice***	Príklad úpravy rovnice **2x = 6**	***Obor pravdivosti*** danej rovnice **K = { 3 }**
1.	***Výmena*** strán rovnice	**6 = 2x**	**K = { 3 }**
2.	***Pripočítanie*** výrazu U(x) definovaného v množine D k obom stranám rovnice	**2x** + x + 1 = **6** + x + 1	**K = { 3 }**
3.	***Násobenie*** oboch strán rovnice ***nenulovým*** výrazom U(x) definovaného v množine D	**2x** . 5 = **6** . 5	**K = { 3 }**
4.	***Delenie*** oboch strán rovnice ***nenulovým*** výrazom U(x) definovaného v množine D	**2x** : 2 = **6** : 2	**K = { 3 }**
5.	Umocnenie oboch strán rovnice	$(2x)^2 = 6^2$, t.j. $4x^2 = 36$	**K = { -3; 3 }**

Pri úpravách č. 1 až 4 novovzniknutá rovnica a pôvodná rovnica majú ten istý obor pravdivosti. Hovoríme, že ***rovnice sú ekvivalentné*** ako aj ***úpravy sú ekvivalentné***.

Použitím ekvivalentných úprav sa nezmení obor pravdivosti žiadnej novej vzniknutej rovnice.

Preto ***nie je nutné robiť' skúšku*** ako neodkladnú súčasť riešenia rovnice.

Pri úprave č. 5 došlo u novovzniknutej rovnice k ***rozšíreniu oboru pravdivosti K*** o číslo ***-3***, ktoré ale ***nevyhovuje pôvodnej rovnici*** (pri riešení rovnice sa hľadajú korene vždy pre pôvodnú rovnicu).

Takáto úprava rovnice nie je ekvivalentná – ***JE NEEKVIVALENTNÁ*** (***dôsledková***).

Pri vykonaní neekvivalentnej úpravy sa ***musí urobiť' skúška (skúška je súčasťou riešenia)***, aby sa zistilo, ktorá z konštánt nevyhovuje pôvodnej rovnici, t.j. o ktorú konštantu sa rozšíril obor pravdivosti pôvodnej rovnice.

Pozor - častá chyba:

$$(x+1).(x-3) = x+1 \quad / : (x+1)$$
$$x - 3 = 1$$
$$x = 4$$

Číslo **x = 4** je skutočne koreňom rovnice. Koreňom je ale tiež číslo **x = −1**, ktoré sme však týmto nesprávnym postupom nenašli. Hneď v prvej úprave je totiž skryté ***delenie nulou*** (pre x = -1), ktoré je častou príčinou „postrácania“ koreňov.

Správny postup:

$$(x+1).(x-3) = x+1$$
$$(x+1).(x-3) - (x+1) = 0$$
$$(x+1).(x-3-1) = 0$$
$$(x-1).(x-4) = 0$$
$$x-1=0 \quad \vee \quad x-4=0$$
$$x=1 \quad \vee \quad x=4$$
$$K = \{1; 4\}$$

Typy rovníc

A/ Rovnice s jednou neznámou

Rovnice je možné rozdeliť na ***algebraické rovnice*** (tiež označované ako ***polynomické rovnice***) a ***nealgebraické rovnice*** (***transcendentné rovnice***).

Ako ***algebraickú*** rovnicu ***n - tého*** stupňa o ***jednej neznámej*** označujeme rovnicu tvaru:

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$, kde ľavú stranu rovnice tvorí polynóm ***n - tého*** stupňa, pričom sa predpokladá, že $a_n \neq 0$.

Pokiaľ rovnicu nie je možné vyjadriť v tvare algebraickej rovnice, potom hovoríme o rovnici ***nealgebraickej***.

Rovnice až do ***4.*** stupňa sú všeobecne vždy riešiteľné ***analyticky*** (pomocou určitých algoritmov za použitia vzorcov); v algebre sa dokazuje, že všeobecný vzorec na riešenie akejkoľvek rovnice 5. a vyšších stupňov neexistuje a riešenie je nutné hľadať ***numericky*** (pomocou približných metód).

Medzi najjednoduchšie algebraické rovnice patria:

- ***lineárne*** rovnice ($n = 1$), ... $ax + b = 0$
- ***kvadratické*** rovnice ($n = 2$), ... $ax^2 + bx + c = 0$
- ***kubická*** rovnice ($n = 3$) a ... $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$
- ***bikvadratické*** rovnice ($n = 4$). ... $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$

Pre niektoré zvláštne prípady polynómov dostávame jednoduché rovnice, napr.:

- ***binomické*** rovnice, ... $x^n = k$
- ***recipročné*** rovnice. ... $-5x^3 + 2x^2 + 2x - 5 = 0 \quad \vee \quad -4x^4 + 2x^3 - 2x + 4 = 0$

Medzi najjednoduchšie prípady ***nealgebraických rovníc*** patria napr.:

- rovnice ***s neznámou v menovateli***, ... $x + \frac{1}{x} + \frac{2}{x-5} = 0$
- rovnice ***s absolútnou hodnotou***, ... $/x + 4/ = 0$
- ***iracionálne*** rovnice (s neznámou pod odmocninou), ... $\sqrt{x - 12} = 0$
- ***exponenciálne*** rovnice, ... $5^x - 2^x = 0$
- ***logaritmické*** rovnice, ... $2x - \log x = 0$
- ***goniometrické*** rovnice. ... $\cos^2 x - \sin x = 0$

B/ Rovnice s viacerými neznámymi

Napr.:

- ***lineárne*** rovnice s ***dvoma*** neznámymi, ... $ax + by + c = 0$
- ***lineárne*** rovnice s ***troma*** neznámymi ... $ax + by + cz + d = 0$
- ***diofantické*** rovnice sú rovnice, u ktorých nás zaujímajú len ***celočíselné riešenia***:

Všetky riešenia rovnice $x^2 + y^2 = z^2$ v prirodzených číslach sú tvaru
$x = 2ab$, $y = a^2 - b^2$ a $z = a^2 + b^2$, kde a, b sú prirodzené nesúdeliteľné čísla opačnej parity.

Veľká Fermatova veta:
Pre žiadne prirodzené ***n > 2*** **<u>*nemá*</u> *rovnica*** $x^n + y^n = z^n$ ***riešenie <u>v celých číslach</u>***.

Veta. (Lagrange): Rovnica $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = n$
má riešenie v N_0 pre ***všetky*** prirodzená čísla n.

Trocha histórie:

Pierre de Fermat bol francúzsky matematik (***1601 – 1665***): 

Veľká Fermatova veta je jeden z najslávnejších matematických problémov, ktorého vyriešenie odolávalo niekoľko storočí. Fermat pri čítaní Diofantovej Aritmetiky poznamenal na okraj knižky, že pre prirodzené čísla n ≥3 neexistuje netriviálne (nenulové) celočíselné riešenie rovnice $x^n + y^n = z^n$.
Tiež napísal, že objavil jednoduchý dôkaz tohto tvrdenia, ale nakoľko sa mu už na okraj nevojde, tak ho nebude písať. S riešením tohto problému sa najlepšie mozgy ľudstva trápili 350 rokov.

Anglický matematik ***Andrew Wiles***  sa prvýkrát zoznámil s touto vetou, keď mu bolo 10 rokov. Na dlhé roky sa stal rukojemníkom tejto vety, nakoľko jej dôkaz sa mu nedaril. Počas študentských rokov sa dokonca rozhodol zanechať riešenie tejto rovnice. Osud to však zariadil inak.
V roku 1986 sa u Wilese objavila možnosť zaoberať sa iným nevyriešeným problémom – hypotézou Tanivama-Shimura. Skvelá myšlienka prišla, ako vždy, neočakávane – behom teplého jarného dňa roku 1993. Keď trocha poopravil počiatočné podmienky, dokázal nájsť dôkaz tejto hypotézy.

Výsledky svojej práce predstavil prostredníctvom troch prednášok – ale nesústredil pozornosť na slávnu Fermatovu vetu. Na konci tretej prednášky prítomní v posluchárni si domysleli, k akému záveru prednášajúci mieri. V brilantnom dokazovaní sa predsa našla malá chybička, ktorej odstránenie trvalo ďalší rok. Takto v roku ***1994*** bola vydaná finálna verzia dôkazu slávnej Fermatovej vety. Jej dôkaz zaberá ***200 strán*** a je veľmi zložitý na pochopenie pre väčšinu ľudstva.

Andrew John Wiles *(* 11. marec 1953, Cambridge) je britský matematik žijúci v USA, ktorý sa preslávil svojim dôkazom Veľkej Fermatovej vety, získaným roku 1994.*
Okrem dôkazu Veľkej Fermatovej vety, vytvoreného s pomocou Richarda Taylora, získal ďalšie dôležité výsledky v oblasti teórie čísel.

V súčasnosti je Wiles profesorom a vedúcim katedry matematiky na Princetonskej univerzite. Za svoj najväčší objav bol ocenený celým radom cien a vyznamenaní a je pravdepodobne najslávnejším žijúcim matematikom.

Riešenie rovníc a nerovníc

Lineárne rovnice a nerovnice s jednou neznámou

Lineárna rovnica s neznámou x je každá rovnica, ktorú je možné ekvivalentnými úpravami upraviť na tvar $ax + b = 0$, kde $a, b \in R$, $a \neq 0$.

Pri úpravách rovníc môžu vzniknúť tieto možnosti:

1) $a = 0 \wedge b = 0$, t.j. **0.x = 0** ... tejto rovnici vyhovujú $\forall x \in R$ ... $K = R$
2) $a = 0 \wedge b \neq 0$, t.j. **0.x = -b** ... tejto rovnici nevyhovuje ***žiadne*** $x \in R$ ... $K = \{\ \} = \emptyset$
3) $a \neq 0 \wedge b \in R$, t.j. **a.x = -b** ... tejto rovnici vyhovuje $x = \frac{-b}{a}$ ... $K = \{ \frac{-b}{a} \}$

Príklady:

1/ Riešte v **R**: $7x + 13 = 3x + 5$

$$7x + 13 = 3x + 5$$
$$7x - 3x = 5 - 13$$
$$4x = -8$$
$$x = \frac{-8}{4}$$
$$x = -2$$
$$K = \{-2\}$$

2/ Riešte v **R**: $5(2 - x) = -5x - 7$

$$5(2 - x) = -5x - 7$$
$$10 - 5x = -5x - 7$$
$$5x - 5x = -7 - 10$$
$$0.x = -17$$
$$K = \{\ \} = \emptyset$$

3/ Riešte v **Q**: $\frac{6+25x}{15} - (x-1) = \frac{2x}{3} + \frac{7}{5}$

$$\frac{6+25x}{15} - (x-1) = \frac{2x}{3} + \frac{7}{5} \quad / .15$$
$$6 + 25x - 15(x - 1) = 10x + 21$$
$$6 + 25x - 15x + 15 = 10x + 21$$
$$25x - 15x - 10x = 21 - 6 - 15$$
$$0.x = 0$$
$$K = Q$$

Lineárna nerovnica s neznámou x je každá nerovnica, ktorú je možné ekvivalentnými úpravami upraviť na tvar $ax + b > 0$; $ax + b \geq 0$; $ax + b < 0$; $ax + b \leq 0$, kde $a, b \in R$, $a \neq 0$.

Pri riešení nerovníc používame tie isté úpravy ako pri riešení rovníc ***s jedinou výnimkou***, ktorá je zrejmá z nasledujúcej ukážky:

$3 < 5$ ... $-5 < -3$, t.j. $-3 > -5$
$3 < 5 \quad / \ . (-1) \quad \ldots \quad -3 > -5$

Záver: ***Pri násobení, resp. delení nerovnice záporným číslom znamienko nerovnosti <u>otočíme</u>.***

Poznámka: Často sa nesprávne hovorí, že <u>*znamienko nerovnosti zmeníme na opačné*</u>, nakoľko napr.

opačné znamienko k znamienku $<$ je znamienko $\geq$.

Príklady:

4/ Riešte v **R**: ***3x – 7 ≤ 5x – 13***

$3x - 7 \leq 5x - 13$
$3x - 5x \leq -13 + 7$
$-2x \leq -6 \quad / : (-2)$
$\boldsymbol{x \geq 3}$ ... $\boldsymbol{x \in \langle 3; \infty)}$

$\boldsymbol{K = \langle 3; \infty)}$ ...

5/ Riešte v $\mathbf{N_0}$: ***x – 7 < 8 – x***

$x - 7 < 8 - x$
$2x < 15$
$\boldsymbol{x < \frac{15}{2}}$ ... $\boldsymbol{x \in (-\infty; \frac{15}{2} \rangle}$

$\boldsymbol{K_R = (-\infty; \frac{15}{2} \rangle}$ ... $\boldsymbol{K_{No} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6;;7\}}$ ...

Sústava lineárnych nerovníc s neznámou x ; Pri riešení sústavy lineárnych nerovníc hľadáme ***všetky*** čísla, ktoré vyhovujú ***všetkým nerovniciam sústavy***.

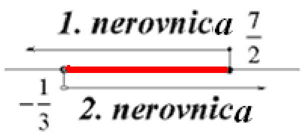
Množina riešení je ***prienikom*** všetkých riešení jednotlivých nerovníc.

Poznámka: Rovnice – nerovnice ***sústavy zapisujeme*** buď ***pod seba*** alebo ***vedľa seba*** ako ***konjunkcie*** jednotlivých výrokových foriem.

6/ Riešte v **R**: $\boldsymbol{2x - 7 \leq 0}$ ... $\boldsymbol{2x - 7 \leq 0 \wedge 3x + 1 > 0}$
$\boldsymbol{3x + 1 > 0}$

$2x - 7 \leq 0 \quad \wedge \quad 3x + 1 > 0$
$x \leq \frac{7}{2} \quad \wedge \quad x > -\frac{1}{3}$

$\boldsymbol{K_{1R} = (-\infty; \frac{7}{2} \rangle \quad \wedge \quad K_{2R} = (-\frac{1}{3}; \infty)}$ ...



$-\frac{1}{3} < x \leq \frac{7}{2}$

$\boldsymbol{K_R = K_{1R} \cap K_{2R} = (-\frac{1}{3}; \frac{7}{2} \rangle}$ ... $\boldsymbol{K_Z = \{0; 1; 2; 3\}}$ ... $\boldsymbol{K_N = \{1; 2; 3\}}$

7/ Riešte v R: $\boldsymbol{2x - 7 > 0 \wedge 3x + 1 \leq 0}$

$x > \frac{7}{2}$ $\wedge$ $x \leq -\frac{1}{3}$ ...

$K_R = \varnothing$

Rovnica v súčinovom tvare je rovnica tvaru ***A(x).B(x). ... .K(x) = 0***, kde výrazy A(x) až K(x) sú výrazy čo najnižšieho stupňa. Uvedený súčin sa rovná nule práve vtedy, keď ***aspoň jeden z činiteľov sa rovná nule.***

8/ Riešte v **R**: $(x + 4).x.(4x - 5) = 0$

$x + 4 = 0 \vee x = 0 \vee 4x - 5 = 0$

$x = -4 \vee x = 0 \vee x = \frac{5}{4}$

$K_R = \{-4; 0; \frac{5}{4}\}$ ... $K_Q = \{-4; 0; \frac{5}{4}\}$ ... $K_Z = \{-4; 0\}$ ... $K_N = \{\ \}$

Poznámka: Nakoľko platí $(x + 4).x.(4x - 5) = 4x^3 + 11x^2 - 20x$, v predchádzajúcom príklade je vyriešená aj rovnica $4x^3 + 11x^2 - 20x = 0$, t.j. rovnica tretieho stupňa – ***kubická***.
Z uvedeného vyplýva, že je možné veľmi ľahko riešiť ***rovnice vyšších stupňov***, pokiaľ ich napíšeme v ***súčinovom tvare***.

Nerovnica v súčinovom tvare je nerovnica niektorého tvaru $L(x) < 0$; $L(x) > 0$; $L(x) \leq 0$; $L(x) \geq 0$, kde ***L(x) = A(x).B(x). ... .K(x)*** a výrazy A(x) až K(x) sú výrazy čo najnižšieho stupňa.
Takéto nerovnice je výhodné riešiť ***formou tabuľky*** pomocou tzv. ***nulových bodov*** – hodnoty x, pre ktoré sa výrazy A(x) až K(x) rovnajú nule.

9/ Riešte v R: $(8 - 4x).(x + 1).(3x - 12).(7 + 2x) \leq 0$

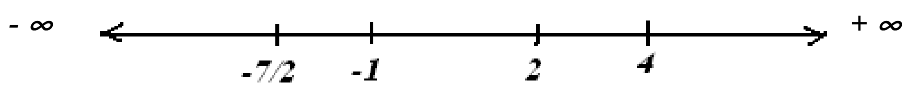
Najskôr sa určia ***nulové body***: $8 - 4x = 0$ ... $x_1 = 2$

$x + 1 = 0$ ... $x_2 = -1$

$3x - 12 = 0$ ... $x_3 = 4$

$7 + 2x = 0$ ... $x_4 = -\frac{7}{2}$,

pomocou ktorých ***rozdelíme číselnú os na intervaly***:



$x \in$	$(-\infty; -7/2)$	$-7/2$	$(-7/2; -1)$	-1	$(-1; 2)$	2	$(2; 4)$	4	$(4; \infty)$
$8 - 4x$	+	+	+	+	+	**0**	–	–	–
$x + 1$	–	–	–	**0**	+	+	+	+	+
$3x - 12$	–	–	–	–	–	–	–	**0**	+
$7 + 2x$	–	**0**	+	+	+	+	+	+	+
$L(x)$	—	**0**	+	**0**	—	**0**	+	**0**	—

Nakoľko ide o ***neostrú*** nerovnosť (≤), riešením sú aj ***nulové body***, preto

$K_R = (-\infty; -7/2 \rangle \cup \langle -1; 2 \rangle \cup \langle 4; \infty)$

Rovnice a nerovnice s neznámou v menovateli

Rovnica (nerovnica) obsahujúca lomené výrazy, v ktorých sa neznáma nachádza v menovateli sa nazýva ***rovnica (nerovnica) s neznámou v menovateli***.

Postup riešenia ROVNICE:

1. najskôr vždy určíme podmienky – ***definičný obor rovnice***, pri ktorých majú dané lomené výrazy zmysel – **menovateľ sa nesmie rovnať nule,**
2. odstránime zlomky – vynásobíme celú rovnicu spoločným menovateľom (***je výhodné mať menovateľov zapísaných v tvare súčinu***) ,
3. odstránime zátvorky,
4. rovnicu, ktorú dostaneme, riešime známymi ekvivalentnými úpravami,
5. získaný koreň rovnice ***porovnáme*** s podmienkami – ***definičným oborom.***

Príklady:

1/ Riešte v **R**: $\frac{x-1}{x-3} = \frac{x+3}{x-6}$

$x - 3 \neq 0 \;\wedge\; x - 6 \neq 0 \;\ldots\; x \neq 3 \;\wedge\; x \neq 6 \;\ldots\; D_R = R - \{3; 6\}$

$\frac{x-1}{x-3} = \frac{x+3}{x-6}$ / . (x – 3).(x – 6)

$(x - 6).(x - 1) = (x - 3).(x + 3) \;\ldots\; x^2 - 7x + 6 = x^2 - 9 \;\ldots\; -7x = -15 \;\ldots\; x = \frac{15}{7} \;\ldots\; \in D_R$

$K_R = \{\frac{15}{7}\}$

<u>Poznámka:</u> Každá rovnica s neznámou v menovateli sa dá ekvivalentne upraviť na tvar

$\frac{L(x)}{M(x)} = 0$ prenosom všetkých jej členov na jednu stranu,

ktoré sa potom ***prevedú na zlomok so spoločným menovateľom***.

Rovnica v podielovom tvare je rovnica, ktorú je možné zapísať v tvare $\frac{L(x)}{M(x)}=0$. Ľavá strana danej rovnice je ***racionálny lomený výraz***. Lomený výraz sa rovná nule práve vtedy, ak sa nule rovná jeho čitateľ. Je výhodné, ak je čitateľ v súčinovom tvare, t.j. ak napr. ***L(x) = A(x).B(x). ... .K(x).***

2/ Riešte v **R**: $\frac{x-1}{x-3} = \frac{x+3}{x-6}$

$\boldsymbol{x - 3 \neq 0 \;\wedge\; x - 6 \neq 0 \;\; \dots \;\; x \neq 3 \;\wedge\; x \neq 6 \;\; \dots \;\; D_R = R - \{3; 6\}}$

$\frac{x-1}{x-3} = \frac{x+3}{x-6} \quad \dots \quad \frac{x-1}{x-3} - \frac{x+3}{x-6} = 0 \quad \dots \quad \frac{(x-1).(x-6)-(x+3).(x-3)}{(x-3).(x-6)} = 0 \quad \dots$

$(x - 1).(x - 6) - (x + 3).(x - 3) = 0 \quad \dots \quad x^2 - 7x + 6 - x^2 + 9 = 0 \quad \dots \quad -7x = -15 \quad \dots \quad \boldsymbol{x = \frac{15}{7} \in D_R}$

$\boldsymbol{K_R = \{\frac{15}{7}\}}$

3/ Riešte v **R**: $\frac{x+3}{x-3} + \frac{7x-15}{9-x^2} = \frac{x-3}{x+3}$ **...** $\boldsymbol{D_R = R - \{-3; 3\}}$

$\frac{x+3}{x-3} + \frac{7x-15}{(3-x).(3+x)} - \frac{x-3}{x+3} = 0 \quad \dots \quad \frac{-(x+3)^2 + 7x - 15 + (x-3)^2}{(3-x).(3+x)} = 0 \quad \dots$

$-x^2 - 6x - 9 + 7x - 15 + x^2 - 6x + 9 = 0 \quad \dots \quad -5x = 15 \quad \dots \quad x = -3 \quad \dots \quad \boldsymbol{\notin D_R} \quad \dots \quad \boldsymbol{K_R = \emptyset}$

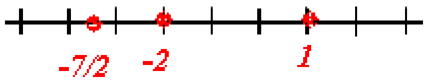
Nerovnice tvaru $\frac{L(x)}{M(x)} < 0$; $\frac{L(x)}{M(x)} \leq 0$; $\frac{L(x)}{M(x)} > 0$; $\frac{L(x)}{M(x)} \geq 0$ nazývame ***nerovnice v podielovom tvare***.

Riešime ich podobne ako nerovnice v súčinovom tvare ***tabuľkovým*** spôsobom za pomoci ***nulových*** bodov

4/ Riešte v **R**: $\dfrac{x+1}{x+2} \le \dfrac{4-x}{1-x}$ ... $\dfrac{x+1}{x+2} - \dfrac{4-x}{1-x} \le 0$ **...** ***D_R = R - {-2; 1}***

... $\dfrac{(x+1).(1-x)-(4-x).(x+2)}{(x+2).(1-x)} \le 0$ ... $\dfrac{-2x-7}{(x+2).(1-x)} \le 0$ ...

... ***N.B.: x_1 = - 7/2 , x_2 = - 2 , x_3 = 1***

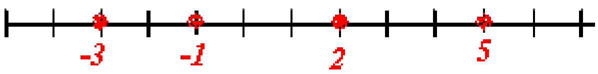


x ∈	*(- ∞; -7/2)*	*-7/2*	***(-7/2; -2)***	***-2***	***(-2; 1)***	***1***	***(1; ∞)***
– 2x – 7	+	**0**	–	–	–	–	–
x + 2	–	–	–	**0**	+	+	+
1 – x	+	+	+	+	+	**0**	–
N(x)	**—**	**0**	+	**Nedef.**	**—**	**Nedef.**	+

K_R = (- ∞; - 7/2) ∪{ - 7/2 } ∪ (-2; 1) = ***(- ∞; - 7/2$\rangle$ ∪ (-2; 1)***

5/ Riešte v **N**: $\dfrac{(x+1).(4-2x)}{(2x+6).(5-x)} \rangle 0$ **...** ***D_R = R - {-3; 5}***

N.B.: x_1 = - 1 , x_2 = 2 , x_3 = - 3 , x_4 = 5



x ∈	*(- ∞; -3)*	*-3*	*(-3; -1)*	*-1*	*(-1; 2)*	*2*	*(2; 5)*	*5*	*(5; ∞)*
x + 1	-	-	-	***0***	+	+	+	+	+
4 – 2x	+	+	+	+	+	***0***	-	-	-
2x + 6	-	***0***	+	+	+	+	+	+	+
5 – x	+	+	+	+	+	+	+	***0***	-
N(x)	+	***Ned.***	-	***0***	+	***0***	-	***Ned.***	+

K_R = (- ∞; - 3) ∪(- 1; 2) ∪ (5; ∞) **...** ***K_N = {1; 6; 7; 8; ... }***

Poznámka: Vyvrcholením riešenia rovníc a nerovníc je ich využitie pri riešení reálnych situácií – ***slovných úloh***.
Pri riešení slovných úloh je potrebné sa presvedčiť o tom, že nájdené riešenie má zmysel a do akej miery korešponduje so situáciou zapísanou v úlohe – „korekcia reality“.

Príklad: Otcovi je 46 rokov, synom 14, 20 a 24 rokov. Za koľko rokov bude vek otca 3-krát väčší než súčet vekov jeho synov ?

x .... hľadaný počet rokov
14+x, 20+x, 24+x .... veky synov
46+x .... vek otca

46+x = 3.[14+x + 20+x + 24+x] ... 46+x = 3.(58+3x) ... ***x = – 16***

Podľa získaného výsledku úlohe vyhovuje situácia pred 16 rokmi. To však nie je možné, lebo pred 16 rokmi najmladší syn ešte nebol na svete.
Záver: ***Úloha nemá riešenie.***

Úlohy – súhrn:

Riešte v R a podľa potreby urobte aj skúšku:

1) $8(3x-5)-5(2x-8)=20+4x$

2) $(8-3x)^2+(5-4x)^2-6=(9-5x)^2+20x-4$

3) $(x-1)^3+(x-2)^3+(x-3)^3=3(x-1)(x-2)(x-3)$

4) $\frac{1}{2}\left(3x-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}\left(4x-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{4}(6x-5)-\frac{2}{3}$

5) $\frac{3(x+1)}{2}-\left(\frac{x+1}{4}+1\right)=\frac{5x+1}{7}-\left(\frac{3x-1}{2}-3\right)$

6) $\frac{6+25x}{15}-(x-1)=\frac{2x}{3}+\frac{7}{5}$

7) $\frac{12}{1-9x^2}=\frac{1-3x}{1+3x}+\frac{1+3x}{3x-1}$

8) $\frac{x+1}{x-1}+\frac{2}{x+2}-1=\frac{6x}{x^2+x-2}$

9) $\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}=\frac{5}{x^2+6}$

Riešte rovnice v daných množinách:

10) $\frac{5x-11}{2}-\frac{5x+3}{5}=\frac{50-22x}{10}$ v $\mathbb{N}$.

11) $(x-3)(x+2)=(x-2)(x-1)$ v $\langle -2;4\rangle$.

12) Cyklista vyšiel v 15 hod. rýchlosťou 15 km/h. O dve hodiny neskôr z toho istého miesta vyšiel za ním motocyklista rýchlosťou 60 km/h. V koľko hodín ho dostihne ?

13) Jeden remeselník vykoná zverenú prácu za 10 dní, druhý tú istú prácu za 15 dní. Za ako dlho vykonajú túto prácu obaja remeselníci spoločne ?

Riešte nerovnice:

14) $2x+7<3x-4$ **15)** $\frac{2x+1}{3}<\frac{2x-1}{5}$ **16)** $(x-3)^2+(x+1)^2<2x^2-6x+13$

17) $\frac{2x-3}{4}+\frac{x}{2}<1;\ x\in\mathbb{N}$ **18)** $\frac{2x-1}{3}-\frac{x+3}{2}<3-\frac{x-2}{3};\ x\in\mathbb{N}_0$

19) $8x+3\le\frac{1}{2}-x;\ x\in A=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,x>-5\}$

Výsledky:

1) 2 **2)** $\frac{1}{3}$ **3)** 2 **4)** $\frac{4}{3}$ **5)** $\frac{5}{3}$ **6)** $\mathbb{R}$ **7)** -1 **8)** rovnica nemá riešenie **9)** -12

10) 3 **11)** 4 **12)** 17 h 40 min **13)** *6* dní **14)** $(11;\infty)$ **15)** $(-\infty;-2)$

16) $\left(-\infty\ ;\frac{3}{2}\right)$ **17)** 1 **18)** $\{1;2;\ldots;10\}$ **19)** $\{-4;-3;-2;-1\}$

Riešte v R:

20) $\frac{3}{x}-\frac{4}{x}=2$ **21)** $\frac{1}{2-x}+\frac{3x}{x-2}=\frac{4}{2-x}+\frac{3x+3}{x-2}$ **22)** $\frac{3}{x+5}-\frac{2}{x+3}=\frac{1}{4x+12}$

23) $\frac{1}{1-\frac{3-x^2}{x+1}}=\frac{1}{x+\frac{2x}{x+1}}$ **24)** $\frac{5m-1}{3m+3}-\frac{3m+2}{2m-2}=\frac{m^2-30m+2}{6m^2-6}$

25) $\frac{9}{x-3}\ge\frac{x+3}{3}$

Výsledky:

20) - 1/2 **21) ∀ x ∈ R - {2}** **22) 3** **23) K = ∅** **24) 2** **25)** ***(- ∞; - 6⟩ ∪(3; 6⟩***

Vyjadrenie neznámej zo vzorca

Pri vyjadrovaní neznámej zo vzorca, vychádzame z toho, že ***vzorce majú tvar matematickej rovnice***, v ktorej ***vyjadrovaná premenná hrá úlohu neznámej*** a ***všetky ostatné písmená*** (premenné alebo konštanty) ***hrajú úlohu konštánt.***

<u>Obvyklý postup pri vyjadrovaní neznámej zo vzorca – úprava rovnosti:</u>

1. – odstránenie zlomkov
2. – odstránenie zátvoriek
3. – zhromaždenie všetkých členov obsahujúcich danú neznámu na jednej strane, zvyšných na druhej strane rovnosti
4. – vyňatie neznámej pred zátvorky
5. – osamostatnenie a vyjadrenie danej neznámej

<u>Príklady:</u>

Z uvedených vzorcov ***vyjadrite neznámu zapísanú v zložených zátvorkách***:

1/ $F = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad \{m_1\}$.

$$F = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad / \cdot \frac{r^2}{\kappa m_2}$$
$$\frac{Fr^2}{\kappa m_2} = m_1$$
$$m_1 = \frac{Fr^2}{\kappa m_2}$$

2/ $F = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad \{r\}$

$$F = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad / \cdot r^2$$
$$Fr^2 = \kappa m_1 m_2 \quad / : F$$
$$r^2 = \frac{\kappa m_1 m_2}{F} \quad / \sqrt{\ }$$
$$r = \sqrt{\frac{\kappa m_1 m_2}{F}}$$

3/ $v = v_0 - gt \quad \{g\}$.

$$v = v_0 - gt \quad / + gt$$
$$v + gt = v_0 \quad / - v$$
$$gt = v_0 - v \quad / : t$$
$$g = \frac{v_0 - v}{t}$$

4/ $S = 2(ab + ac + bc) \quad \{a\}$

$$S = 2ab + 2ac + 2bc \quad / - 2bc$$
$$S - 2bc = 2ab + 2ac$$
$$S - 2bc = a(2b + 2c) \quad / 2b + 2c$$
$$\frac{S - 2bc}{2b + 2c} = a$$
$$a = \frac{S - 2bc}{2b + 2c}$$

5/ $Z = -\frac{f}{a - f} \quad \{a\}$.

$$Z = -\frac{f}{a - f} \quad / \cdot (a - f)$$
$$Z(a - f) = -f$$
$$Za - Zf = -f \quad / + Zf$$
$$Za = Zf - f \quad / : Z$$
$$a = \frac{Zf - f}{Z}$$

6/ $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad \{C_1\}$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad / \cdot C \cdot C_1 \cdot C_2$$
$$C_1 C_2 = CC_2 + CC_1 \quad / - CC_1$$
$$C_1 C_2 - CC_1 = CC_2$$
$$C_1(C_2 - C) = CC_2 \quad / : (C_2 - C)$$
$$C_1 = \frac{CC_2}{C_2 - C}$$

7/

$$u=\sqrt{a^2+b^2+c^2};\{a\}$$

$$u=\sqrt{a^2+b^2+c^2} \quad /^2$$
$$u^2=a^2+b^2+c^2 \quad /-b^2-c^2$$
$$u^2-b^2-c^2=a^2 \quad /\sqrt{\ }$$
$$\sqrt{u^2-b^2-c^2}=a$$
$$a=\sqrt{u^2-b^2-c^2}$$

8/

$$v=\sqrt{\frac{\kappa M}{R+h}} \quad \{R\}$$

$$v=\sqrt{\frac{\kappa M}{R+h}} \quad /^2$$
$$v^2=\frac{\kappa M}{R+h} \quad /\cdot\frac{(R+h)}{v^2}$$
$$R+h=\frac{\kappa M}{v^2} \quad /-h$$
$$R=\frac{\kappa M}{v^2}-h$$

Úlohy – súhrn:

Z uvedených vzorcov ***vyjadrite neznámu zapísanú v zložených zátvorkách***:

1. a) $v=\frac{s}{t}\ \{s,t\}$ b) $s=s_0+vt\ \{s_0,v\}$ c) $p=h\rho g\ \{h,g\}$

d) $F_1r_1=F_2r_2\ \{F_1,r_2\}$ e) $\frac{\Delta l}{\Delta l_1}=\frac{1}{E}\frac{F}{S}\ \{F,E,\Delta l_1\}$

f) $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{n_2}{n_1}\ \{\sin\beta,n_1,n_2\}$

2. a) $S=6a^2\ \{a\}$ b) $E_k=\frac{1}{2}mv^2\ \{m,v\}$ c) $F=\frac{1}{2}CS\rho v^2\ \{S,v\}$

d) $F_d=\frac{mv^2}{r}\ \{m,r,v\}$ e) $F=\kappa\frac{m_1m_2}{r^2}\ \{m_1,r\}$ f) $p=\frac{1}{3}\frac{N}{V}m_0v_k^2\ \{V,v_k\}$

g) $V=\frac{1}{3}\pi r^2v\ \{r,v\}$ h) $E_n=\frac{h^2}{8mL^2}n^2\ \{n,m,L\}$

3. a) $v=v_0+at\ \{v_0,t\}$ b) $v=v_0-gt\ \{v_0,g\}$ c) $s=s_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2\ \{a,v_0\}$

d) $S=2\pi r(r+v)\ \{v\}$ e) $S=2(ab+ac+bc)\ \{a\}$

f) $l=l_0(1+\alpha\Delta t)\ \{l_0,\Delta t\}$ g) $I=\frac{U_e}{R_i+R}\ \{U_e,R\}$ h) $Z=-\frac{f}{a-f}\ \{a,f\}$

i) $hf=W_v+\frac{1}{2}mv^2\ \{f,m,v\}$ j) $mgh_1+\frac{1}{2}mv_1^2=mgh_2+\frac{1}{2}mv_2^2\ \{h_1,v_2\}$

4. a) $v=\sqrt{\frac{\kappa M}{R+h}}\ \{R,M\}$ b) $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\ \{l,g\}$ c) $u=\sqrt{a^2+b^2+c^2};\{a\}$

d) $f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}\ \{k,m\}$ e) $l=l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\ \{v,c\}$

f) $V=\frac{\pi v}{6}\left(3\rho_1^2+3\rho_2^2+v^2\right)\ \{\rho_1\}$

5. a) $\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2};\{C,C_1\}$ b) $v=\frac{(d_1+d_2)v_1v_2}{d_1v_2+d_2v_1};\{d_2,v_1\}$

c) $u=\frac{u'+v}{1+\frac{u'v}{c^2}}\ \{v\}$ d) $\frac{1}{f}=\left(\frac{n_2}{n_1}-1\right)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right);\{n_1,n_2,r_1\}$

Výsledky:

1. a) $s = vt$, $t = \frac{s}{v}$ **b)** $s_0 = s - vt$, $v = \frac{s-s_0}{t}$ **c)** $h = \frac{p}{\rho g}$, $g = \frac{p}{h\rho}$ **d)** $F_1 = \frac{F_2 r_2}{r_1}$,
$r_2 = \frac{F_1 r_1}{F_2}$ **e)** $F = \frac{\Delta l}{\Delta l_1} ES$, $E = \frac{\Delta l_1}{\Delta l}\frac{F}{S}$, $\Delta l_1 = \frac{ES\Delta l}{F}$ **f)** $\sin\beta = \frac{n_1 \sin\alpha}{n_2}$, $n_1 = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} n_2$,
$n_2 = n_1 \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ **2. a)** $a = \sqrt{\frac{S}{6}}$ **b)** $m = \frac{2E_k}{v^2}$, $v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}}$ **c)** $S = \frac{2F}{C\rho v^2}$, $v = \sqrt{\frac{2F}{CS\rho}}$
d) $m = \frac{F_d r}{v^2}$, $r = \frac{mv^2}{F_d}$, $v = \sqrt{\frac{F_d r}{m}}$ **e)** $m_1 = \frac{Fr^2}{\kappa m_2}$, $r = \sqrt{\frac{\kappa m_1 m_2}{F}}$ **f)** $V = \frac{N m_0 v_k^2}{3p}$,
$v_k = \sqrt{\frac{3pV}{Nm_0}}$ **g)** $r = \sqrt{\frac{3V}{\pi v}}$, $v = \frac{3V}{\pi r^2}$ **h)** $n = \sqrt{\frac{8E_n m L^2}{h^2}}$, $m = \frac{h^2 n^2}{8mL^2 E_n}$, $L = \sqrt{\frac{h^2 n^2}{8mE_n}}$
3. a) $v_0 = v - at$, $t = \frac{v-v_0}{a}$ **b)** $v_0 = v + gt$, $g = \frac{v_0 - v}{t}$ **c)** $a = \frac{2(s-s_0-v_0 t)}{t^2}$
$v_0 = \frac{2s-2s_0-at^2}{2t}$ **d)** $v = \frac{S-2\pi r^2}{2\pi r}$ **e)** $a = \frac{S-2bc}{2(b+c)}$ **f)** $l_0 = \frac{l}{1+\alpha\Delta t}$, $\Delta t = \frac{l-l_0}{l_0 \alpha}$ **g)**
$U_e = (R_i + R)I$ $R = \frac{U_e - IR_i}{I}$ **h)** $a = \frac{Zf-f}{Z}$, $f = \frac{Za}{Z-1}$ **i)** $f = \frac{2W_v + mv^2}{2h}$
$m = \frac{2(hf - W_v)}{v^2}$, $v = \sqrt{\frac{2(hf-W_v)}{m}}$ **j)** $h_1 = h_2 + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g}$, $v_2 = \sqrt{2gh_1 - 2gh_2 + v_1^2}$
4. a) $R = \frac{\kappa M}{v^2} - h$, $M = \frac{v^2(R+h)}{\kappa}$ **b)** $l = \frac{gT^2}{4\pi^2}$, $g = l\frac{4\pi^2}{T^2}$ **c)** $a = \sqrt{u^2 - b^2 - c^2}$
d) $k = 4\pi^2 f^2 m$ $m = \frac{k}{4\pi^2 f^2}$ **e)** $v = c\frac{\sqrt{l_0^2 - l^2}}{l_0}$, $c = \frac{l_0 v}{\sqrt{l_0^2 - l^2}}$ **f)** $\rho_1 = \sqrt{\frac{6V - 3\pi v \rho_2^2 - \pi v^3}{3\pi v}}$
5. a) $C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$, $C_1 = \frac{CC_2}{C_2 - C}$ **b)** $d_2 = \frac{d_1 v_2 (v_1 - v)}{v_1 (v - v_2)}$, $v_1 = \frac{v v_2 d_1}{v_2 d_1 + v_2 d_2 - v d_2}$ **c)** $v = \frac{c^2(u-u')}{c^2 - uu'}$
d) $n_1 = \frac{n_2 f(r_1 + r_2)}{r_1 r_2 + f(r_1 + r_2)}$, $n_2 = n_1 \frac{r_1 r_2 + f(r_1+r_2)}{f(r_1 + r_2)}$, $r_1 = \frac{fr_2(n_2 - n_1)}{n_1 r_2 - f(n_2 - n_1)}$

Sústava dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi

Dvojicu rovníc $\boldsymbol{a_1 x + b_1 y = c_1}$

$\boldsymbol{a_2 x + b_2 y = c_2}$

kde $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in R$, nazývame ***sústavou dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi*** x, y . ***Riešením*** tejto sústavy nazývame každú ***usporiadanú dvojicu [x_0 , y_0]*** , ktorá ***vyhovuje obom rovniciam súčasne***.

Usporiadaná dvojica je množina dvoch prvkov, v ktorej ***záleží na poradí*** uvedených prvkov.

V usporiadaných množinách zapisujeme prvky ***v danom poradí do lomených zátvoriek***.

Tato sústava môže mať buď jedno riešenie, alebo nekonečne veľa riešení, alebo žiadne riešenie.

Pozor! ***Jedna usporiadaná dvojica [x_0 , y_0] je jedným riešením sústavy rovníc.***

Metódy riešenia takejto sústavy: ***dosadzovacia***

sčítacia

porovnávacia

1. ***Dosadzovacia metóda***: z niektorej rovnice vyjadríme jednu neznámu a dosadíme do rovnice druhej. Získame tak jednu lineárnu rovnicu o jednej neznámej.

Príklad: Riešte v QxQ sústavu: $3x + 2y = -4 \quad \wedge \quad 2x - 3v = 19$

Z 2. rovnice vyjadríme napr. x: $x = \dfrac{19+3y}{2}$ a dosadíme do 1. rovnice: $3.\dfrac{19+3y}{2} + 2y = -4$ ...
... $3.(19 + 3y) + 4y = -8$ ... $13y = -65$ ... $\boldsymbol{y = -5}$

Dosadením napr. do 2. rovnice dopočítame x: $2x - 3.(-5) = 19$ ... $2x = 4$ ... $\boldsymbol{x = 2}$

$\boldsymbol{K_{QxQ} = \{[2; -5]\}}$

2. ***Sčítacia metóda***: vhodným vynásobením jednej alebo oboch rovníc a ich následným sčítaním (odčítaním) dostaneme jednu rovnicu o jednej neznámej.

Príklad: Riešte v QxQ sústavu: $3x + 2y = -4 \quad \wedge \quad 2x - 3y = 19$

$3x + 2y = -4 \quad / \, . \, 3$
$\underline{2x - 3y = 19 \quad / \, . \, 2}$

$9x + 6y = -12$
$\underline{4x - 6y = 38}$

$13x = 26$ ... $\boldsymbol{x = 2}$

Dosadením x = 2 do ľubovoľnej rovnice a vypočítaním dostaneme ***y = – 5***. ... $\boldsymbol{K_{QxQ} = \{[2; -5]\}}$

3. ***Porovnávacia metóda***: Z rovníc vyjadríme rovnakú neznámu a dáme do rovnosti.

Príklad: Riešte v QxQ sústavu: $3x + 2y = -4 \quad \wedge \quad 2x - 3v = 19$

$x = \dfrac{-4-2y}{3} \quad \wedge \quad x = \dfrac{19+3y}{2}$ ... $\dfrac{-4-2y}{3} = \dfrac{19+3y}{2}$ ... $-8 - 4y = 57 + 9y$ ...
... $-13y = 65$ ... $\boldsymbol{y = -5}$

Dosadením y = – 5 do ľubovoľnej rovnice a vypočítaním dostaneme ***x = 2***. ... $\boldsymbol{K_{QxQ} = \{[2; -5]\}}$

Príklad: Za tri roky bude otec päťkrát starší než syn a za päť rokov len štyrikrát starší. Koľko rokov je otcovi a koľko synovi?

Súčasný vek otca ...... ***x*** rokov za tri roky.... $(x + 3)$ za päť rokov ...... $(x + 5)$
<u>Súčasný vek syna ...... ***y*** rokov za tri roky.... $(y + 3)$ za päť rokov...... $(y + 5)$</u>
$x + 3 = 5(y + 3)$ $\qquad$ $x + 5 = 4(y + 5)$

$$\begin{aligned} x+3&=5(y+3)\\ x+5&=4(y+5)\\ \hline -(x-5y&=12)\\ x-4y&=15\\ \hline y=3 &\Rightarrow x=27 \end{aligned}$$

Otcovi je ***27 rokov*** *a synovi* ***3 roky***.

Úlohy – súhrn:

Riešte v **R x R**:

1) $$\begin{aligned} 2x-y&=1\\ x+3y&=11 \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} 4x+3y&=6\\ 2x+y&=4 \end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned} x+4y&=37\\ 2x+5y&=53 \end{aligned}$$

4) $$\begin{aligned} 12y&=11x-196\\ 12x&=13y+213 \end{aligned}$$

5) $$\begin{aligned} 2x+7y-18&=4(x+y)\\ 5x-4y-13&=2(x-y) \end{aligned}$$

6) $$\begin{aligned} (x+4)(y-2)&=(x-5)(y+4)\\ (x+6)(y-1)&=(x-1)(y+2) \end{aligned}$$

7) $$\begin{aligned} \frac{2x+1}{5}-\frac{3y+2}{7}&=2y-x\\ \frac{3x-1}{4}+\frac{7y+2}{6}&=2x-y \end{aligned}$$

8) $$\begin{aligned} \frac{2x-y+3}{3}-\frac{x-2y+3}{4}&=4\\ \frac{3x-4y+3}{4}+\frac{4x-2y-9}{3}&=4 \end{aligned}$$

9) $$\begin{aligned} \frac{4}{x-3y}&=\frac{7}{9x+2y}\\ \frac{3}{2x+y}&=\frac{9}{x-y+1} \end{aligned}$$

10) $$\begin{aligned} \frac{2}{x-2y}&=\frac{3}{2x-y}\\ \frac{4x-2y}{3(x-2y)}&=1 \end{aligned}$$

11) $$\begin{aligned} \frac{2x-5}{x-4}-\frac{y+1}{y-2}&=1\\ \frac{3x+1}{x-1}-\frac{2y+9}{y+2}&=1 \end{aligned}$$

12) $$\begin{aligned} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}&=5\\ \frac{3}{x}-\frac{5}{y}&=-9 \end{aligned}$$ **(návod:** $\frac{1}{x}=u\ ;\ \frac{1}{y}=v$ **)**

Výsledky

1) $[2;3]$ **2)** $[3;-2]$ **3)** $[9;7]$ **4)** $[8;-9]$ **5)** $[15;16]$ **6)** $[8;4]$ **7)** $[7;4]$ **8)** $[7;5]$

9) $[1;-1]$ **10)** sústava má nekonečne veľa riešení **11)** $[5;3]$ **12)** $\left[\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right]$

Sústava troch lineárnych rovníc s tromi neznámymi

Pri riešení sústav viac rovníc s viac neznámymi používame rovnaké úpravy ako v predchádzajúcej kapitole, pričom môžeme vynechať rovnicu, ktorá je násobkom rovnice inej.
Sústavu (ľubovoľného počtu) rovníc s tromi neznámymi tak budeme prevádzať na sústavu dvoch rovníc s dvomi neznámymi.

1. Príklad: Riešte v **R x R x R**:

$$\begin{aligned} x+y-z&=11\\ x-y+z&=1\\ -x+y+z&=5 \end{aligned}$$

Dosadzovacia metóda: (napríklad) z prvej rovnice vyjadríme (napríklad) ***x*** , tj. $x = 11 - y + z$
a dosadíme do zvyšných dvoch rovníc:

$$\left.\begin{aligned} 11-y+z-y+z&=1\\ -(11-y+z)+y+z&=5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} -2y+2z&=-10\\ 2y&=16 \end{aligned}\right.$$

Odtiaľ ľahko dostaneme ***y = 8*** ; ***z = 3*** a dosadením do ľubovoľnej z troch pôvodných rovníc dostaneme ***x = 6***.
Sústava má **jedno riešenie:** $[x, y, z] = [6;8;3]$ **.** **...** $\boldsymbol{K_{RxRxR} = \{[6;8;3]\}}$

Sčítacia metóda: Sčítame vhodné násobky rovníc tak, aby sme sa „zbavili“ jednej neznámej. Získame tak sústavu dvoch rovníc o dvoch neznámych. Ako je vidieť nižšie, v tomto prípade sa vhodným sčítaním zbavíme dokonca dvoch neznámych:

Sčítame prvú a druhú rovnicu:

$$\begin{aligned} x+y-z&=11\\ x-y+z&=1\\ \hline 2x=12 &\Rightarrow x=6 \end{aligned}$$

Sčítame druhú a tretiu rovnicu:

$$\begin{aligned} x-y+z&=1\\ -x+y+z&=5\\ \hline 2z=6 &\Rightarrow z=3 \end{aligned}$$

Hodnotu neznámej ***y*** zistíme opäť dosadením ***x = 6***; ***z = 3*** do ľubovoľnej z troch pôvodných rovníc.

2. Príklad: Riešte v **R x R x R**:

$$\begin{aligned} x+y-z&=11\\ x-y+z&=1\\ -x+y+z&=5 \end{aligned}$$

Sčítaním prvej a druhej rovnice dostaneme $2x = 12 \Rightarrow$ ***x = 6*** . Dosadením tejto hodnoty do druhej a tretej rovnice dostaneme sústavu dvoch rovníc o dvoch neznámych:

$$\left.\begin{aligned} 6-y+z&=1\\ -6+y+z&=5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} -y+z&=-5\\ y+z&=11 \end{aligned}\right.$$

Tieto rovnice je možné opäť sčítať, dostaneme $2z = 6 \Rightarrow$ ***z = 3*** a dosadením tejto hodnoty do ktorejkoľvek rovnice dopočítame ***y = 8*** .
Riešením sústavy je teda $[x; y; z] = [6;8;3]$. **...** $\boldsymbol{K_{RxRxR} = \{[6;8;3]\}}$

Úlohy – súhrn:

Riešte v **R x R x R**:

1) $\begin{aligned} x-y-z&=5\\ y-x-z&=1\\ z-x-y&=-15 \end{aligned}$

2) $\begin{aligned} x+2y-3z&=-8\\ -3x+y+2z&=10\\ 2x-3y+2z&=5 \end{aligned}$

3) $\begin{aligned} 2x-3y+4z&=5\\ 3x+4y-2z&=0\\ -4x+2y+3z&=8 \end{aligned}$

4) $\begin{aligned} x+2y&=9\\ y-3z&=-5\\ 5z-x&=14 \end{aligned}$

5) $\begin{aligned} x+y&=13\\ y-z&=5\\ x-z&=2 \end{aligned}$

6) $\begin{aligned} x+y&=28\\ x+z&=30\\ y+z&=32 \end{aligned}$

7) $\begin{aligned} x-y&=\frac{1}{3}\\ y-z&=\frac{1}{6}\\ x+z&=\frac{4}{3} \end{aligned}$

8) $\begin{aligned} x+2y&=\frac{7}{4}\\ y+3z&=\frac{5}{2}\\ 4x+z&=\frac{11}{3} \end{aligned}$

9) $\begin{aligned} \frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}&=1\\ \frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}&=1\\ \frac{x}{4}+\frac{y}{5}+\frac{z}{6}&=1 \end{aligned}$

Výsledky:

1) $[7;5;-3]$ **2)** $[3;5;7]$ **3)** $[0;1;2]$ **4)** $[1;4;3]$ **5)** $[5;8;3]$ **6)** $[13;15;17]$

7) $\left[\frac{11}{12};\frac{7}{12};\frac{5}{12}\right]$ **8)** $\left[\frac{3}{4};\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right]$ **9)** $[12;-60;60]$

Karteziánsky súčin množín

Nech **U** a **V** sú ***neprázdne množiny***. ***Karteziánskym súčinom množín U*** a ***V*** (v danom poradí) je množina ***všetkých usporiadaných dvojíc [x; y],*** kde $x \in U \wedge y \in V$.

<u>Príklad:</u> K={a; b; c}, L={2;5}. Určte L x K. ***L x K = {[2; a], [2; b],[2; c],[5; a],[5; b],[5; c]}***

<u>Poznámka:</u>

Nakoľko riešením sústavy rovníc ***o dvoch neznámych*** je ***usporiadaná dvojica*** ,
sústavy rovníc ***o troch neznámych*** je ***usporiadaná trojica***, sústavy sa riešia ***v karteziánskom súčine*** príslušného počtu množín.

<u>Napr.:</u> Ak riešením sústavy sú **x = 3** a **y = – 7**, potom platí: $K_{ZxZ} = \{[3; -7]\}$ ale
$K_{ZxN} = \{\ \} = \emptyset$ lebo ***– 7 nie je prirodzené číslo.***

Ak riešením sústavy sú **x = 3 , y = – 7** a **z = 0,8** , potom platí: $K_{QxQxQ} = \{[3; -7; 0,8]\}$ ale
$K_{NxNxN} = \{\ \} = \emptyset$ lebo ***– 7*** ani ***0,8 nie je prirodzené číslo.***

Možné skrátené zápisy: $RxRxR = R^3$, $QxQ = Q^2$

ABSOLÚTNA HODNOTA REÁLNEHO ČÍSLA

Definícia absolútnej hodnoty:

Absolútna hodnota reálneho čísla ***a*** je také číslo $|a|$, pre ktoré platí:

pre $a \geq 0$ je $|a| = a$
pre $a < 0$ je $|a| = -a$

<u>Príklad:</u> $|4| = 4$, $|0| = 0$, $|-7| = 7$

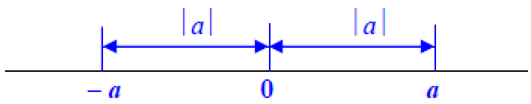
Absolútna hodnota čísla je ***vždy nezáporné číslo:*** $|a| = \begin{cases} a, & pre \quad a \geq 0 \\ -a, & pre \quad a < 0 \end{cases}$

Vlastnosti absolútnej hodnoty:

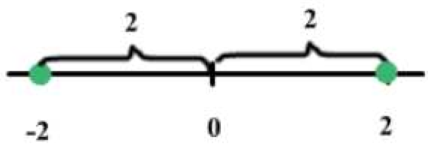
$$|a| \geq 0 \qquad \sqrt{a^2} = |a| \qquad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$
$$|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0 \qquad |a.b| = |a|.|b|$$
$$|a| = |-a|$$

Geometrický význam absolútnej hodnoty:

Absolútna hodnota reálneho čísla ***a*** určuje **vzdialenosť** obrazu čísla ***a*** na číselnej osi od začiatku, t.j. od obrazu čísla ***0***.

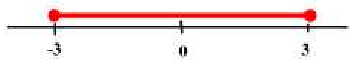


<u>Príklad:</u> $|x| = 2$
$x = \pm 2$



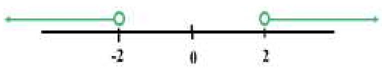
$|x| = 0$ počátek, $x = 0$
$|x| = -3$ nedá sa

$A = \{x \in R. |x| \leq 3\}$



$x \in \langle -3, 3 \rangle$

$B = \{x \in R. |x| > 2\}$

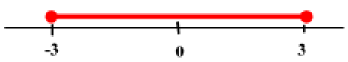


$x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$

V prípade **rovnosti** výsledkom sú ***body***, v prípade **nerovnosti** sú to ***intervaly***.

<u>Poznámka:</u> $\forall a \in R$ a $\forall k \in R \wedge k \geq 0$ zápis $|x - a| \leq k$ v <u>*grafickom zobrazení na číselnej osi*</u> reprezentuje ***obrazy bodov*** (všetkých čísel **x**), ktoré sú ***od obrazu čísla <u>a</u>*** vzdialené ***na menej*** ako je hodnota čísla ***k*** alebo ***na hodnotu*** čísla ***k***.

Napr.: $|x| \leq 3$, t.j. $|x - 0| \leq 3$ ...



$x \in \langle -3, 3 \rangle$

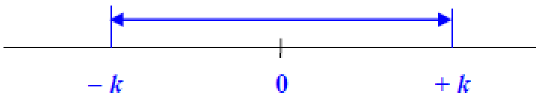
Číslo **0** je pre výraz **x – 0** tzv. ***nulový bod***.

Vyjadrenie absolútnej hodnoty intervalom:

Pre $\boldsymbol{k > 0}$ platí:

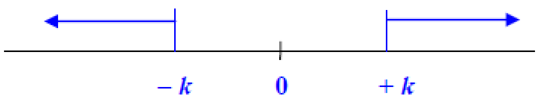
$\rightarrow \{ x \in R;\ |x| \le k\} = \langle -k; k \rangle$

$\rightarrow \{ x \in R;\ |x| < k\} = (-k; k)$



$\rightarrow \{ x \in R;\ |x| \ge k\} = (-\infty; -k \rangle \cup \langle k ; +\infty)$

$\rightarrow \{ x \in R;\ |x| > k\} = (-\infty; -k) \cup (k ; +\infty)$



Príklad:

$\{x \in R;\ |x| \le 3\} = \langle -3 ; 3 \rangle$

$\{x \in R;\ |x| < 3\} = (-3 ; 3)$

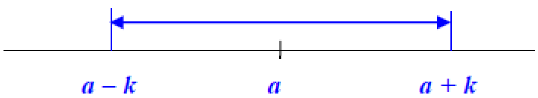
$\{x \in R;\ |x| \ge 3\} = (-\infty ; -3 \rangle \cup \langle 3 ; +\infty)$

$\{x \in R;\ |x| > 3\} = (-\infty ; -3) \cup (3 ; +\infty)$

Pre $\boldsymbol{k > 0, a \in R}$ platí:

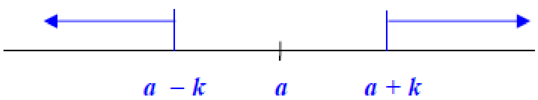
$\rightarrow \{ x \in R;\ |x - a| \le k\} = \langle a - k;\ a + k \rangle$

$\rightarrow \{ x \in R;\ |x - a| < k\} = (a - k;\ a + k)$



$\rightarrow \{ x \in R;\ |x - a| \ge k\} = (-\infty ; a - k \rangle \cup \langle a + k ; +\infty)$

$\rightarrow \{ x \in R;\ |x - a| \ge k\} = (-\infty ; a - k) \cup (a + k ; +\infty)$



Príklad:

$\{x \in R;\ |x - 2| \le 3\} = \langle -1; 5\rangle$

$\{x \in R;\ |x - 2| < 3\} = (-1; 5)$

$\{x \in R;\ |x - 2| \ge 3\} = (-\infty; -1\rangle \cup \langle 5; +\infty)$

$\{x \in R;\ |x - 2| > 3\} = (-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$

Poznámka: Číslo **a** pre výraz $|\boldsymbol{x - a}|$ sa nazýva ***nulový bod***, nakoľko ***hodnota výrazu*** $\boldsymbol{x - a}$ pre $\boldsymbol{x = a}$ sa ***rovná nule***.

Príklad: Zobrazte na číselnej osi $\forall x \in R$, ktoré vyhovujú výrokovým formám

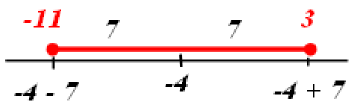
a) $|x + 2| = 5$

b) $|x + 4| \le 7$, a potom zapíšte ich obory pravdivosti v ***N***, ***Z***, ***R***.

a) $|x + 2| = 5$ ... $|x - (-2)| = 5$ ... nulový bod je $\boldsymbol{x_0 = -2}$ ...

$K_R = \{-7; 3\}$, $K_Z = \{-7; 3\}$, $K_N = \{3\}$

b) $|x + 4| \le 7$ ... $|x - (-4)| \le 7$ ... nulový bod je $\boldsymbol{x_0 = -4}$ ...



$K_R = \langle -11; 3\rangle$, $K_Z = \{-11;-10;-9;-8;-7;-6;-5;-4;-3;-2;-1;0;1;2;3\}$, $K_N = \{1;2;3\}$

Úlohy – súhrn:

1. Vypočítajte: a) $-|-5| + |-4| - (-2-|-3|) =$

   b) $\left|\frac{-2}{3}\right| - \frac{1}{|-6|} - \frac{|2|}{-|12|} =$

2. Vyjadrite bez absolútnych hodnôt:

   pre $x \geq 0$: a) $|-x| + 2x - |-3x| + |4x| =$
   b) $x - |3x| + |-2x| =$

   pre $x < 0$: a) $|-x| - 2x + |3x| =$
   b) $|x| - |3x| + |-4x| =$

3. Znázornite na číselnej osi: a) $|x-2| = 3$ b) $|x+1| = 2$ c) $|2-x| = 3$

4. Znázornite uvedené množiny na číselnej osi a potom ich zapíšte pomocou intervalov:

   $M_1 = \{x \in R;\ x > 8\}$ $M_2 = \{x \in R;\ 3 < x \leq 7\}$ $M_3 = \{x \in R;\ |x| < 3\}$
   $M_4 = \{x \in R;\ |x| \geq 2\}$ $M_5 = \{x \in R;\ |x-1| < 2\}$ $M_6 = \{x \in R;\ |x+2| \leq 2\}$
   $M_7 = \{x \in R;\ |x-3| > 5\}$ $M_8 = \{x \in N;\ |x| < 8\}$ $M_9 = \{x \in Z;\ |x+3| \leq 6\}$

Lineárne rovnice a nerovnice s absolútnou hodnotou

Lineárne rovnice s absolútnou hodnotou

Podstatou riešenia *lineárnej rovnice s absolútnymi hodnotami* je jej ekvivalentná úprava ***na rovnicu bez absolútnych hodnôt***, ktorá sa ďalej vyrieši zaužívaným spôsobom.

Využívame pri tom vlastnosti absolútnej hodnoty: $|V(x)| = \begin{cases} V(x), & \text{ak pre } \forall x \in I \text{ platí } V(x) \geq 0 \\ -V(x), & \text{ak pre } \forall x \in I \text{ platí } V(x) < 0 \end{cases}$

Príklad 1: Riešte v R: $\mathbf{|3x - 6| = 4 - 2x}$

Riešene: a) $\mathbf{3x - 6 \geq 0 \ \dots\ x \geq 2 \ \dots\ x \in \langle 2; \infty) \wedge \underline{3x - 6 = 4 - 2x} \ \dots\ 5x = 10 \ \dots\ x = 2 \ \dots\ 2 \in \langle 2; \infty)}$

$\mathbf{K_{Ra} = \{ 2 \}}$

b) $\mathbf{3x - 6 < 0 \ \dots\ x < 2 \ \dots\ x \in (-\infty; 2) \wedge \underline{-(3x - 6) = 4 - 2x} \ \dots\ -x = -2 \ \dots\ x = 2 \ \dots\ 2 \notin (-\infty; 2)}$

$\mathbf{K_{Rb} = \{ \ \}}$

Riešenie rovnice: $K_R = K_{Ra} \cup K_{Rb} = \{ 2 \} \cup \{ \ \} = \{ 2 \}$

Príklad 2: Riešte v R: $|3x-6| + 2x = 10 - |4-x|$

Riešene: a) $3x-6 \geq 0 \wedge 4-x \geq 0$ ... $x \geq 2 \wedge x \leq 4$ ... $x \in \langle 2; 4 \rangle \wedge (3x-6) + 2x = 10 - (4-x)$ ...
... $4x = 12$ ... $x = 3$ ... $3 \in \langle 2; 4 \rangle$ ... $K_{Ra} = \{ 3 \}$

b) $3x-6 \geq 0 \wedge 4-x < 0$ ... $x \geq 2 \wedge x > 4$ ... $x \in (4; \infty) \wedge (3x-6) + 2x = 10 + (4-x)$ ...
... $6x = 20$ ... $x = 10/3 \cong 3,3$ ... $10/3 \notin (4; \infty)$ ... $K_{Rb} = \{ \ \}$

c) $3x-6 < 0 \wedge 4-x \geq 0$ ... $x < 2 \wedge x \leq 4$ ... $x \in (-\infty; 2) \wedge -(3x-6) + 2x = 10 - (4-x)$ ...
... $-2x = 0$ ... $x = 0$ ... $0 \in (-\infty; 2)$ ... $K_{Rc} = \{ 0 \}$

d) $3x-6 < 0 \wedge 4-x < 0$ ... $x < 2 \wedge x > 4$ ... $x \in \{ \ \}$ ... **o rovnici nemá zmysel uvažovať** ...
... $K_{Rd} = \{ \ \}$

Riešenie rovnice: $K_R = K_{Ra} \cup K_{Rb} \cup K_{Rc} \cup K_{Rd} = \{ 3 \} \cup \{ \ \} \cup \{ 0 \} \cup \{ \ \} = \{ 0; 3 \}$

Poznámka: Na základe predchádzajúcich riešení môžeme predpokladať, že rovnica s ***troma rôznymi*** absolútnymi hodnotami bude mať ***8 „čiastkových riešení“***, so ***4*** abs. h. ***16*** atď., t.j. rovnica s ***n rôznymi*** absolútnymi hodnotami bude mať ***2^n „čiastkových riešení“*** , čo je pre riešenie dosť zdĺhavé.

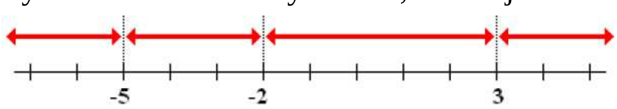
Preto je oveľa výhodnejšie takéto rovnice riešiť použitím tabuľky – ***tabuľkovým spôsobom***.

Príklad 3: Riešte v R: $|x+2| - |x+5| + 2x = 9 - |6-2x|$.

Riešene:

Najskôr určíme tzv. **nulové body** absolútnych hodnôt, t.j. body, pre ktoré sú výrazy v jednotlivých absolútnych hodnotách rovné nule:
1. pre absolútnu hodnotu $|x + 2|$ je nulovým bodom ***–2*** (zdôvodnenie: $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$)
2. pre absolútnu hodnotu $|x + 5|$ je nulovým bodom –5 (zdôvodnenie: $x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$)
3. pre absolútnu hodnotu $|6 - 2x|$ je nulovým bodom ***3*** (zdôvodnenie: $6 - 2x = 0 \Rightarrow x = 3$)

Tým sa množina reálnych čísel, v ktorej zadanú úlohu riešime, „rozdelí“ na štyri intervaly:



$(-\infty; -5)$, $\langle -5; -2)$, $\langle -2; 3 \rangle$ a $(3; \infty)$

Poznámka: Interval je vždy ***uzavretý pri hranici***, ktorá je ***nulovým bodom výrazu***, ktorý v danom intervale ***ostáva bez zmeny***.

Na týchto intervaloch budeme úlohu riešiť a rovnicu vyriešime na každom intervale zvlášť.
Pre ľahší a rýchlejší postup je vhodné si pripraviť ***tabuľku***, do ktorej si rozpíšeme absolútne hodnoty zo zadanej úlohy na jednotlivých intervaloch:

Rozpis v tabuľke urobíme podľa definície absolútnej hodnoty: $|V(x)| = \begin{cases} V(x), & \text{ak pre } \forall x \in I \text{ platí } V(x) \geq 0 \\ -V(x), & \text{ak pre } \forall x \in I \text{ platí } V(x) < 0 \end{cases}$

Do výrazu danej absolútnej hodnoty dosadíme ľubovoľné číslo z **intervalu I, NA KTEROM PRÁVE ABSOLÚTNU HODNOTU VYŠETRUJEME**. Ak je hodnota výrazu ***kladná***, necháme výraz ***bez zmeny***, ak ***záporná***, ***zmeníme*** výraz ***na opačný***.
Teraz už môžeme na jednotlivých intervaloch vyriešiť zadanú rovnicu tak, že ju nahradíme rovnicou bez absolútnych hodnôt využitím výrazov z tabuľky.

	$(-\infty; -5) = I_a$	$\langle -5; -2) = I_b$	$\langle -2; 3\rangle = I_c$	$(3; \infty) = I_d$
$\lvert x + 2\rvert$	$-x - 2$	$-x - 2$	$x + 2$	$x + 2$
$\lvert x + 5\rvert$	$-x - 5$	$x + 5$	$x + 5$	$x + 5$
$\lvert 6 - 2x\rvert$	$6 - 2x$	$6 - 2x$	$6 - 2x$	$-6 + 2x$
$\lvert x + 2\rvert - \lvert x + 5\rvert + 2x = 9 - \lvert 6 - 2x\rvert$	$-x - 2 - (-x - 5) + 2x = 9 - (6 - 2x)$	$-x - 2 - (x + 5) + 2x = 9 - (6 - 2x)$	$x + 2 - (x + 5) + 2x = 9 - (6 - 2x)$	$x + 2 - (x + 5) + 2x = 9 - (-6 + 2x)$
	…	…	…	…
	$0.x = 0$	$-2.x = 10$	$0.x = 6$	$4.x = 18$
	$x \in R$	$x = -5$	$x \in \{\ \} = \emptyset$	$x = 9/2 = 4,5$
Konfrontácia s intervalmi	$R \cap I_a = I_a$	$-5 \in I_b$	$\emptyset \cap I_c = \emptyset$	$-4,5 \in I_d$
Riešenia na intervaloch	$K_{Ra} = (-\infty; -5)$	$K_{Rb} = \{-5\}$	$K_{Rc} = \{\ \} = \emptyset$	$K_{Rd} = \{-4,5\}$
Celkové riešenie	$K_R = K_{Ra} \cup K_{Rb} \cup K_{Rc} \cup K_{Rd} = (-\infty; -5) \cup \{-5; 4,5\}$			

a) $x \in (-\infty; -5)$: $\quad -x - 2 - (-x - 5) + 2x = 9 - (6 - 2x)$

$$-x - 2 + x + 5 + 2x = 9 - 6 + 2x$$
$$0x = 0$$

Aj keď sa na prvý pohľad zdá, že riešením rovnice sú všetky reálne čísla, musíme si uvedomiť, že rovnicu neriešime v množine reálnych čísel, ale len na intervale $(-\infty; -5)$.
Preto sú riešením len čísla z tohto intervalu, t.j. $K_{Ra} = (-\infty; -5)$.

b) $x \in \langle -5; -2)$: $\quad -x - 2 - (x + 5) + 2x = 9 - (6 - 2x)$

$$-x - 2 - x - 5 + 2x = 9 - 6 + 2x$$
$$-2x = 10$$
$$x = -5 \ \dots\ -5 \in \langle -5; -2) \ \dots\ K_{Rb} = \{-5\}$$

c) $x \in \langle -2; 3\rangle$: $\quad x + 2 - (x + 5) + 2x = 9 - (6 - 2x)$

$$x + 2 - x - 5 + 2x = 9 - 6 + 2x$$
$$0x = 6 \ \dots\ x \in \{\ \} = \emptyset \ \dots\ K_{Rc} = \{\ \}$$

d) $x \in (3; \infty)$: $\quad x + 2 - (x + 5) + 2x = 9 - (-6 + 2x)$

$$x + 2 - x - 5 + 2x = 9 + 6 - 2x$$
$$4x = 18$$
$$x = 9/2 = 4,5 \ \dots\ 4,5 \in (3; \infty) \ \dots\ K_{Rd} = \{-4,5\}$$

Riešením rovnice je $K_R = K_{Ra} \cup K_{Rb} \cup K_{Rc} \cup K_{Rd} = (-\infty; -5) \cup \{-5; 4,5\}$

<u>Záver:</u> $O = D = R$ a $K_R = (-\infty; -5) \cup \{-5; 4,5\}$

Poznámka: Z riešenia príkladu č. 3 je vidieť, že na rozdiel od riešenia danej rovnice analytickým rozborom, ktoré by obsahovalo $\mathbf{2^3 = 8}$ „čiastkových riešení“, stačilo použiť len **4** „čiastkové riešenia“, t.j. o **4** „čiastkové riešenia“ sme riešenie rovnice skrátili.

Celkový počet „čiastkových riešení“ rovnice s **n** rôznymi absolútnymi hodnotami je:
a) pri analytickom rozbore: $\mathbf{2^n}$
b) pri tabuľkovom spôsobe: **n + 1** ... čo znamená, že pre ***n ≥ 2 je výhodnejšie*** používať ***tabuľkový spôsob.***
Napr.: pre **n = 4** : 2^4 = **16** a 4 + 1 = **5** , t.j. ušetríme **11 „čiastkových riešení“.**

Lineárne nerovnice s absolútnou hodnotou

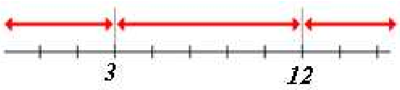
Lineárne nerovnice s absolútnou hodnotou riešime rovnakým spôsobom ako rovnice.

Príklad: Riešte v R: $|x-3| + |12-x| \geq x$

Riešene:

Najskôr určíme tzv. **nulové body** absolútnych hodnôt, t.j. body, pre ktoré sú výrazy v jednotlivých absolútnych hodnotách rovné nule:
1. pre absolútnu hodnotu $|x-3|$ je nulovým bodom ***3*** (zdôvodnenie: $x - 3 = 0 \Rightarrow x = \mathbf{3}$)
2. pre absolútnu hodnotu $|12-x|$ je nulovým bodom ***12*** (zdôvodnenie: $12 - x = 0 \Rightarrow x = \mathbf{12}$)

Tým sa množina reálnych čísel, v ktorej zadanú úlohu riešime, „rozdelí“ na tri intervaly:



$(-\infty; 3)\ ,\ \langle 3; 12\rangle,\ (12; \infty)$

	$(-\infty; 3) = I_a$	$\langle 3; 12\rangle = I_b$	$(12; \infty) = I_c$
$\lvert x-3 \rvert$	$-x+3$	$x-3$	$x-3$
$\lvert 12-x \rvert$	$12-x$	$12-x$	$-12+x$
$\lvert x-3\rvert + \lvert 12-x\rvert \geq x$	$(-x+3)+(12-x) \geq x$	$(x-3)+(12-x) \geq x$	$(x-3)+(-12+x) \geq x$
	...	...	...
	$-3.x \geq -15$	$-x \geq --9$	$x \geq 15$
	$x \leq 5$	$x \leq 9$	$x \geq 15$
	$x \in (-\infty; 5\rangle$	$x \in (-\infty; 9\rangle$	$x \in \langle 15; \infty)$
Konfrontácia s intervalmi	$(-\infty; 5\rangle \cap I_a = (-\infty; 3)$	$(-\infty; 9\rangle \cap I_b = \langle 3; 9\rangle$	$\langle 15; \infty) \cap I_c = \langle 15; \infty)$
Riešenia na intervaloch	$K_{Ra} = (-\infty; 3)$	$K_{Rb} = \langle 3; 9\rangle$	$K_{Rc} = \langle 15; \infty)$
Celkové riešenie	$K_R = K_{Ra} \cup K_{Rb} \cup K_{Rc} = (-\infty; 3) \cup \langle 3; 9\rangle \cup \langle 15; \infty) = (-\infty; 9\rangle \cup \langle 15; \infty)$		

Úlohy – súhrn:

1) Riešte rovnice v obore Z:

a) $|x - 8| + 3 = 2x$ b) $|6x + 5| - |1 - x| = 0$ c) $3x - 5 = 7 - |5 + x|$

d) $2x + |7 - 2x| = 10$ e) $x - 2|3x + 6| = 5 - 2x$

2) Vyriešte v R:

a) $|x - 1| + |2x - 3| < 5$ b) $|2x + 5| \geq |7 - 4x|$

Riešte v množine reálnych čísel:

1.) $2x - |x - 3| = 4$

2.) $1 - 3x = |6 + 2x|$

3.) $5 - 2.\,|x + 4| = 3x$

4.) $x + 6 - 4.\,|5x + 1| = 3.(2 - 3x)$

5.) $7 - 6.(2 - 4x) = 4x + 5.\,|6 - 2x|$

6.) $5(4 - 2x) - 3x = 1 - |x + 1|$

7.) $2 - 3.(2x + 1) = 6 + 2|x|$

8.) $1 - 3|2x + 6| = 4x - 5(1 - 2x)$

9.) $2 + 5.\,|x| = 2x - 6$

10.) $2x - 4.\,|x + 5| = 3 + 5.\,(1 - 4x)$

11.) $7 - 2.(2 - 4x) = 3 + |2 - x|$

12.) $5 + 3.(4 - 3x) = 1 - |5 - 3x|$

13.) $5 - 3.\,|9 - 6x| = 8 - 4.\,(3 - 5x)$

14.) $8 - 2.\,|7 - x| = 3x - 5.\,(1 - 2x)$

15.) $6 + 2.\,|9 - 3x| = 3 + 4.(1 - 2x)$

16.) $|x + 1| + |x - 2| = 4x - 1$

17.) $2 - 3.\,|x| = 1 + 3x - |2x - 6|$

18.) $5x + 6.(1 - 2x) = 3.\,|3x + 9| + 5.\,|x + 4|$

19.) $2 - |x + 1| = 4x + 3|2x + 6|$

20.) $1 - 2.(5 - 3x) + |x + 4| = 6 - 3|x - 1|$

21.) $2.(2 - 3x) + 5|2x + 8| = 4 - |x + 5|$

Riešte v množine reálnych čísel:

1.) $2 - 5|x + 3| \geq x + 6$

2.) $3x - 4|x + 1| > 1 - 2(x + 1)$

3.) $4x - 2(x - 1) \leq 2 - |2x + 6|$

4.) $5 - |x - 3| < 3 - 2(1 - 2x)$

5.) $6x - 1 > 3 - 4.\,|5x + 10| + 5.\,(2 - 3x)$

6.) $2 - 3.(3 - 4x) + |x| \leq 2x - |x + 4|$

7.) $5 - 2.\,|x + 5| \geq 2x - (1 + 3x)$

8.) $3x + 1.(3 - 4x) < 4 - 2.\,|8 + 3x|$

9.) $2.\,|8 - x| - 4.\,(1 + 3x) \leq 7$

10.) $6.(5 + 3x) - 5.\,|9x - 3| \geq 4x - 1$

11.) $2 - |7 - x| \geq 8x + 3(2 + 4x)$

12.) $3x + 5|4 - 2x| > 6 - 5.(1 - 2x)$

13.) $1 - 5|4x - 12| \geq 3 - 4.(2 - 5x)$

14.) $8 + 2.\,|3x - 1| > 2 - 5.\,(2 + 7x)$

15.) $3 - |x + 1| + 2.\,(4 - 5x) \geq |x|$

16.) $6 - 5.(x + 8) < |3x| - |x + 4|$

17.) $5 - 3.(x + 6) - 2|2x - 6| \geq 4 + 3|x + 5|$

18.) $8 - 3.\,|x + 5| \leq 2x - 6.(1 + 3x) - 4.\,|x|$

19.) $8 + 4.(2 - x) - 3.\,|8x + 1| > 3 + 5|5x - 4|$

20.) $7 - |x + 1| + 3.\,(1 - x) \leq 5x + 2|x + 3|$

21.) $7 - 2.\,|x + 5| \geq 3 - (1 - 2x) - 4|x + 1|$

22.) $2x - 3|x + 3| \leq 7 - (1 - 5x) + 3|x|$

Kvadratické rovnice a nerovnice

Kvadratická rovnica (s neznámou x) je rovnica, ktorú je možné ekvivalentne upraviť na tvar

$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$, kde a, b, c $\in$ R $\wedge\ a \neq 0$.

Pomenovanie: $\boldsymbol{ax^2}$ je kvadratický, $\boldsymbol{bx}$ lineárny a $\boldsymbol{c}$ absolútny člen , ***a, b, c*** sú koeficienty,

$\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$ je kvadratický trojčlen

Rovnicu je možné riešiť ***doplnením kvadratického trojčlena*** na ľavej strane ***na úplný štvorec***:

$$\left.\begin{array}{llll} ax^2 + & bx & & +c=0 \\ x^2 & +\ \frac{b}{a}x & & +\frac{c}{a}=0 \\ A^2 & +2AB+B^2 & & \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} A^2 = x^2 \Rightarrow A = x \\ 2AB = \frac{b}{a}x \Rightarrow 2B = \frac{b}{a} \Rightarrow B = \frac{b}{2a} \\ \boxed{B^2 = \frac{b^2}{4a^2}} \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l} A^2 + 2AB + B^2 \\ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0 \\ (A+B)^2 \\ \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \qquad - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0 \end{array}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

O existencii riešenia v oboru reálnych čísel rozhoduje existencia reálnej odmocniny $\sqrt{b^2-4ac}$, t.j. hodnota výrazu $\boldsymbol{D = b^2 - 4ac}$, ktorý nazývame **diskriminant** kvadratické rovnice:

a) Ak je $\boldsymbol{D > 0}$, existujú dva rôzne reálne korene: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$,

b) Ak je $\boldsymbol{D = 0}$, ide o tzv. reálny dvojnásobný koreň: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} \Rightarrow x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$,

c) Ak je $\boldsymbol{D < 0}$, potom rovnica nemá riešenie v obore reálnych čísel.

<u>Poznámka:</u> ***Discriminare*** (lat.) = ***rozlišovať***

Príklad: Riešte v R:

a) $2x^2 - x - 6 = 0$ b) $4x^2 + 12x + 9 = 0$ c) $x^2 - 4x + 13 = 0$

Riešenie:

a) $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{4} = \frac{1 \pm 7}{4} = \left\langle \begin{array}{l} 2 \\ -\frac{3}{2} \end{array} \right.$; tj. $x_1 = 2$; $x_2 = -\frac{3}{2}$, tedy $K = \left\{2; -\frac{3}{2}\right\}$

b) $x_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{144-144}}{8} = \frac{-12 \pm 0}{8} = -\frac{3}{2}$; tj. $x_1 = x_2 = -\frac{3}{2}$, tedy $K = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$

c) $x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-52}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2}$

Rovnica „c" ***nemá riešenie v obore reálnych čísel***, nakoľko **D = – 36** .

Má však riešenie v ***obore komplexných čísel:***

$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}i}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 2+3i \\ 2-3i \end{array} \right.$; tj. $x_1 = 2+3i$; $x_2 = 2-3i$

Nech $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$, kde a, b, c $\in$ R $\wedge\ a \neq 0$. Potom ak

1) **b = 0** ... $\boldsymbol{ax^2 + c = 0}$ - kvadratická rovnica ***bez lineárneho člena,*** tzv. ***rýdzokvadratická rovnica***

$$ax^2 = -c \ldots x^2 = -c/a \ldots x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}\text{, ak } -c/a > 0$$

2) **c = 0** ... $\boldsymbol{ax^2 + bx = 0}$ - kvadratická rovnica ***bez absolútneho člena***

$$x.(ax + b) = 0 \ldots x = 0 \vee ax + b = 0 \ldots x_1 = 0 \text{ a } x_2 = -b/a$$

3) $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0 / :a}$ ... $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ ... $\boldsymbol{x^2 + px + q = 0}$, kde $\boldsymbol{p = b/a} \wedge \boldsymbol{q = c/a}$

$\boldsymbol{x^2 + px + q = 0}$ - kvadratická rovnica ***v normovanom tvare*** *(koeficient* ***kvadrat. člena = 1)***

Nech $\mathbf{x_1}$ a $\mathbf{x_2}$ sú korene rovnice $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0.}$

Potom platí: $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = a.(x - x_1).(x - x_2)}$ ... $\boldsymbol{x^2 + px + q = (x - x_1).(x - x_2)}$ ...

... $\boldsymbol{x^2 + px + q} = x^2 - (x_1 + x_2).x + x_1.x_2$, t.j. $\boldsymbol{x_1 + x_2 = -p}$ a $\boldsymbol{x_1.x_2 = q}$.

Vzťahy $\boldsymbol{x_1 + x_2 = -p = -b/a}$ a $\boldsymbol{x_1.x_2 = q = c/a}$ nazývame ***Vietove vzťahy***.

Výrazy $\boldsymbol{x - x_1}$ a $\boldsymbol{x - x_2}$ nazývame ***koreňové činitele.***

Zápis $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = a.(x - x_1).(x - x_2)}$ a $\boldsymbol{x^2 + px + q = (x - x_1).(x - x_2)}$ nazývame ***rozklad*** kvadratického trojčlena ***na súčin koreňových činiteľov***.

Príklad 1: Napíšte kvadratickú rovnicu, ktorej koreňmi budú čísla **- 3** a **5** a koeficient **a = 1,2.**

Riešenie: $-p = x_1 + x_2 = -3 + 5 = 2$ ... $p = -2$

$q = x_1 \cdot x_2 = -3 \cdot 5 = -15$ ... ***normovaná rovnica:*** $x^2 - 2x - 15 = 0 \;/ \cdot 1,2$

$$\underline{\underline{1,2x^2 - 2,4x - 18 = 0}}$$

Príklad 2: Riešte v R nasledujúce rovnice použitím Vietovych vzťahov:

a) $x^2 + 3x + 2 = 0$ ... $x_1 + x_2 = -3 \wedge x_1 . x_2 = 2$ ... $x_1 = -1$ a $x_2 = -2$ ... $K_R = \{-1; -2\}$
b) $x^2 - x - 6 = 0$ ... $x_1 + x_2 = 1 \wedge x_1 . x_2 = -6$ ... $x_1 = 3$ a $x_2 = -2$ ... $K_R = \{3; -2\}$
c) $x^2 - 9x + 20 = 0$ ... $x_1 + x_2 = 9 \wedge x_1 . x_2 = 20$ ... $x_1 = 4$ a $x_2 = 5$ ... $K_R = \{4; 5\}$

Kvadratická nerovnica (s neznámou x) je nerovnica, ktorú je možné ekvivalentne upraviť na tvar

$ax^2 + bx + c < 0$ (alebo $>$; $\leq$; $\geq$) , kde a, b, c $\in$ R $\wedge a \neq 0$.

Kvadratické nerovnice je možné riešiť úpravou na ***súčinový tvar*** alebo za pomoci „rozkladu na štvorec“ úpravou na ***nerovnicu absolútnou hodnotou*** – univerzálny metóda, ktorá sa dá uplatniť na každú kvadratickú nerovnicu.

Príklady:

1/ Riešte v R: $x^2 + 6x - 7 \geq 0$

$x^2 + 6x$ ... $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$

	Rozklad na **súčinový tvar**	Úprava na **ner. s absolútnou hodnotou**
1.	$(x + 3)^2 - 9 - 7 \geq 0$	$(x + 3)^2 - 9 - 7 \geq 0$
2.	$(x + 3)^2 - 16 \geq 0$	$(x + 3)^2 - 16 \geq 0$
3.	$(x + 3)^2 - 4^2 \geq 0$	$(x + 3)^2 \geq 16 \;/ \sqrt{}$
4.	$(x + 3 - 4).(x + 3 + 4) \geq 0$	$\lvert x + 3 \rvert \geq 4$
5.	$\mathbf{(x - 1).(x + 7) \geq 0}$	$\mathbf{\lvert x - (-3) \rvert \geq 4}$
6.	Nulové body: **1** a **–7**	Nulový bod: **– 3**
7.	... použiť ***tabuľku***	... použiť ***číselnú os***
8.	$\mathbf{K_R = (-\infty; -7\rangle \cup \langle 1; \infty)}$	$\mathbf{K_R = (-\infty; -7\rangle \cup \langle 1; \infty)}$

2/ Riešte v R: $-3x^2 + 6x + 18 > 0$

	Rozklad na **súčinový tvar**	Úprava na **ner. s absolútnou hodnotou**

Najskôr nerovnicu **upraviť na normovaný tvar**

1. $-3x^2 + 6x + 18 > 0 \;/ : (-3)$
2. $\mathbf{x^2 - 2x - 6 < 0}$

$x^2 - 2x \;\; \dots \;\; (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$

	Rozklad na súčinový tvar	Úprava na ner. s absolútnou hodnotou
3.	$(x-1)^2 - 1 - 6 < 0$	$(x-1)^2 - 1 - 6 < 0$
4.	$(x-1)^2 - 7 < 0$	$(x-1)^2 - 7 < 0$
5.	$(x-1)^2 - \left(\sqrt{7}\right)^2 < 0$	$(x-1)^2 < 7 / \sqrt{}$
6.	$\mathbf{(x - 1 - \sqrt{7}).(x - 1 + \sqrt{7}) < 0}$	$\mathbf{\lvert x-1 \rvert < \sqrt{7}}$
7.	Nulové body: $\mathbf{1 - \sqrt{7}}$ a $\mathbf{1 + \sqrt{7}}$	Nulový bod: **1**
8.	... použiť ***tabuľku***	... použiť ***číselnú os***
9.	$\mathbf{K_R = (1 - \sqrt{7}\,;\, 1 + \sqrt{7})}$	$\mathbf{K_R = (1 - \sqrt{7}\,;\, 1 + \sqrt{7})}$

3/ Riešte v R: $x^2 - 8x + 25 > 0$

$x^2 - 8x \;\; \dots \;\; (x-4)^2 = x^2 - 8x + 16$

	Rozklad na **súčinový tvar**	Úprava na **ner. s absolútnou hodnotou**
1.	$(x-4)^2 - 16 + 25 > 0$	$(x-4)^2 - 16 + 25 > 0$
2.	$(x-4)^2 + 9 > 0$	$(x-4)^2 + 9 > 0$
3.	***Nedá sa rozložiť na súčin***	$(x-4)^2 > -9$
4.	**POZOR !!!**	Kvôli číslu ***– 9*** nerovnica sa ***nedá odmocniť***
5.	Vzniká dojem, že nerovnica nemá riešenie, čo v tomto prípade **nie je pravda** .	Nakoľko hodnota výrazu ***$(x-4)^2$ je vždy nezáporná***, nerovnici vyhovujú $\forall x \in \mathbf{R}$
6.	$\mathbf{K_R = R}$	$\mathbf{K_R = R}$

4/ Riešte v R: $x^2 - 8x + 25 \le 0$

$x^2 - 8x \;\; \dots \;\; (x-4)^2 = x^2 - 8x + 16$

	Rozklad na **súčinový tvar**	Úprava na **ner. s absolútnou hodnotou**
1.	$(x-4)^2 - 16 + 25 \le 0$	$(x-4)^2 - 16 + 25 \le 0$
2.	$(x-4)^2 + 9 \le 0$	$(x-4)^2 + 9 \le 0$
3.	***Nedá sa rozložiť na súčin***	$(x-4)^2 \le -9$
4.	**POZOR !!!**	Kvôli číslu ***– 9*** nerovnica sa ***nedá odmocniť***
5.	Vzniká dojem, že nerovnica nemá riešenie, čo v tomto prípade **je pravda**.	Nakoľko hodnota výrazu ***$(x-4)^2$ je vždy nezáporná***, nerovnici nevyhovujú **žiadne** $\mathbf{x \in R}$
6.	$\mathbf{K_R = \emptyset}$	$\mathbf{K_R = \emptyset}$

Úlohy – súhrn:

1) Riešte rovnicu:

a) $2x^2 + 9x = 0$ b) $3x^2 = 6x$

c) $4x^2 - 64 = 0$ d) $16 - 7x^2 = 79$

e) $1{,}8x^2 - 2 = 3$ f) $(2x - 3)^2 = 81 - 12x$

g) $(x - 6)^2 + (x - 8)^2 = 0$ h) $\frac{x-1}{x-2} + \frac{x-2}{x-1} = \frac{5}{2}$

2) Obvod kosoštvorca je 104, obsah 480. Určte dĺžku uhlopriečok.

3) Nájdite dve čísla tak, aby sa ich súčet rovnal 10 a súčin 1.

4) Určte spamäti druhý koreň kvadratickej rovnice, ak prvý poznáte. Niektoré rovnice majú utajený koeficient:

a) $x^2 + 4x - 2 = 0$, $x_1 = 2$ d) $3x^2 + 11x - 11 = 0$, $x_1 = 1$

b) $x^2 + \bigstar x + 14 = 0$, $x_1 = -7$ e) $x^2 + 6x + \bigstar = 0$, $x_1 = -2$

c) $5x^2 - \bigstar x - 21 = 0$, $x_1 = -6$ f) $-x^2 + 3x + \bigstar = 0$, $x_1 = 21$

5) Nájdite kvadratickú rovnicu, ktorá má korene r, s, ak:

a) $r = 4$, $s = -7$

b) $r = 3 + \sqrt{5}$, $s = 3 - \sqrt{5}$

c) $r = 6$, $s = \sqrt{6}$

d) $r = 2$, $s = -5$ a lineárny koeficient sa rovná 10

e) $r = -0{,}5$; $s = 8$ a kvadratický koeficient sa rovná 4

6) Určte druh koreňov danej rovnice:

a) $x^2 - 7x - 30 = 0$ b) $x^2 + 5x - 2346 = 0$

c) $3x^2 + 23x - 70 = 0$ d) $5x^2 - 18x + 6 = 0$

e) $12x^2 - 20x - 25 = 0$ f) $62x^2 - x + 1 = 0$

7) Pre ktoré b nemá rovnica $3x^2 - bx + b + 5 = 0$ riešenie v množine R?

8) Určte hodnotu parametra $p \in R$ tak, aby rovnica $x^2 - px + 9 = 0$ mala aspoň jeden reálny koreň.

9) Upravte kvadratický trojčlen na tvar $(X \pm A)^2 \pm B$:

a) $x^2 + 2x + 5$ b) $x^2 - 10x$

c) $x^2 - 18x - 7$ d) $x^2 - 4{,}2x + 10$

e) $x^2 + 3x - 1$ f) $x^2 - x$

g) $6 - 68x + x^2$ h) $x^2 + 1{,}2x + 8$

10) Upravte na súčin vypočítaním koreňov kvadratickej rovnice:

a) $x^2 + 2x - 63$ b) $48 - 16x + x^2$

c) $x^2 + 7x - 1$ d) $2x^2 + 7x - 9$

e) $7 - 5x^2 + 2x$ f) $x^2 + 3x + 7$

g) $4x^2 + 4x + 1$

11) Riešte rovnice. Najskôr ich upravte:

a) $\dfrac{x^2+31x}{x} = 1 + x$ b) $\dfrac{x^2+x-2}{x-1} = x^2$

12) Riešte nerovnicu:

a) $x^2 - x - 12 < 0$ b) $x^2 - 8x + 12 \geq 0$

c) $2x^2 - 3x + 1 = 0$ d) $4x^2 > 12x$

e) $2x^2 + 3x + 4 > 0$ f) $4x - x^2 > 12$

g) $x(x - 2) \leq 2x - 4$ h) $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x}{6}+\dfrac{7}{3}<\dfrac{(x-3)^2}{6}+3x$

Rovnice s neznámou pod odmocninou (iracionálne rovnice)

Postup riešenia:
1) Pokiaľ je v rovnici jen 1 odmocnina, osamostatníme ju na jednu stranu rovnice a rovnicu umocníme.
2) Pokiaľ je v rovnici niekoľko odmocnín, postup niekoľkokrát opakujeme.
Umocnenie rovníc nie je ekvivalentná úprava, preto musíme vždy urobiť skúšku, ktorá vylúči niektoré korene.

Upozornenie: Pokiaľ je druhá strana ***dvojčlen*** (viacčlen), umocňujeme podľa vzorcov $\mathbf{(A + B)^2}$ ($\mathbf{(A + B + C + ... + N)^2}$)

Príklad 1: Riešte v R: $\sqrt{5x-1}+1=2x$ ... $\sqrt{5x-1}=2x-1$ / ^{2} ... $5x - 1 = 4x^2 - 4x + 1$ ...
... $4x^2 - 9x + 2 = 0$ ... $D = 81 - 4.4.2 = 49$

$$x_{1,2}=\frac{9\pm 7}{2.4}=\frac{16 alebo 2}{8}=\frac{16}{8}alebo\frac{2}{8}=2 alebo\frac{1}{4}$$

Skúška: Ľ(2) = $\sqrt{10-1}+1=\sqrt{9}+1=4$ ... P(2) = 2.2 = 4 ... Ľ(2) = P(2)

$Ľ\left(\frac{1}{4}\right)=\sqrt{5.\frac{1}{4}-1}+1=\sqrt{\frac{1}{4}}+1=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$ ... $P\left(\frac{1}{4}\right)=2.\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ ... Ľ(1/4) ≠ P(1/4)

Záver: $\mathbf{K_R = \{2\}}$

Príklad 2: Riešte v R:

$$\sqrt{x} + \sqrt{x+9} = 9$$

$$\sqrt{x} = 9 - \sqrt{x+9} \qquad /^2$$

$$x = 81 - 18\sqrt{x+9} + x + 9$$

$$18\sqrt{x+9} = 90 \qquad /:18$$

$$\sqrt{x+9} = 5 \qquad /^2$$

$$x + 9 = 25 \qquad\qquad x = 16$$

Skúška: $L = \sqrt{16} + \sqrt{25} = 4 + 5 = 9$ $\qquad P = 9 \qquad$ L =P

Záver: $\mathbf{K_R = \{16\}}$

Úlohy – súhrn:

Riešte v R:

1.) $\sqrt{x-1} = 5$ [26]

2.) $\sqrt{x-1} = -5$ [ϕ]

3.) $-\sqrt{x+3} = 1$ [ϕ]

4.) $\sqrt{x+4} - \sqrt{x-4} = 0$ [ϕ]

5.) $\sqrt{x-8} - \sqrt{3x-2} = 0$ [ϕ]

6.) $2 = \sqrt{x+3} - \sqrt{x-1}$ [1]

7.) $\sqrt{x-5} - \sqrt{x+3} = -2$ [6]

8.) $\sqrt{x+5} + \sqrt{2x+8} = 7$ [4]

9.) $\sqrt{x+5} - \sqrt{x^2-7} = 0$ $[0, 7]$

10.) $\sqrt{5+x} + \sqrt{5-x} = \sqrt{10}$ $[-5, 5]$

11.) $\sqrt{5+x} + \sqrt{5-x} = 4$ $[-4, 4]$

12.) $x + 1 = \sqrt{5x+1}$ $[0, 3]$

13.) $-\sqrt{2x-5} + \sqrt{2x+2} = 1$ $[7]$

14.) $\sqrt{x+5} + \sqrt{x-2} = 7$ $[11]$

15.) $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-1} = \dfrac{15}{\sqrt{x+4}}$ $[5]$

Rovnice s parametrom

Úloha: Riešte v R nasledujúce rovnice a potom ich skúste zapísať ***jedinou rovnicou***:

P.č.	Rovnica	Riešenie
1.	$(-1)^2.x - x = -1 - 1$	$K_R = \{\} = \varnothing$
2.	$0^2.x - x = 0 - 1$	$K_R = \{1\}$
3.	$1^2.x - x = 1 - 1$	$K_R = R$
4.	$2^2.x - x = 2 - 1$	$K_R = \{1/3\}$
5.	$3^2.x - x = 3 - 1$	$K_R = \{1/4\}$
6.	$4^2.x - x = 4 - 1$	$K_R = \{1/5\}$
	...	
	$p^2.x - x = p - 1, \quad p \in \{-1; 0; 1; 2; 3; 4\}$	
	$p^2.x - x = p - 1$ $x.(p^2 - 1) = p - 1$ $x.(p - 1).(p + 1) = p - 1$ ***ak*** $p = -1$: $x.(-2).0 = -2$ ... $0.x = -2$ ***ak*** $p = 1$: $x.0.2 = 0$ ... $0.x = 0$ ***ak*** $p \neq \pm 1$: $x = \frac{p-1}{p^2-1} = \frac{p-1}{(p-1).(p+1)} = \frac{1}{p+1}$	ak p = -1 .... $K_R = \{\} = \varnothing$ ak p = 1 .... $K_R = R$ ak $p \in R - \{\pm 1\}$ ... $K_R = \{\frac{1}{p+1}\}$

Rovnica s ***neznámou x*** a ***parametrom p*** vyjadruje zápis ***množiny všetkých rovníc***, ktoré získame dosadením konštánt ***do parametra z oboru parametra***.

Poznámka: Pri riešení rovnice s parametrom ***riešime súčasne toľko rovníc***, koľko je ***prípustných*** parametrov (často nekonečne veľa rovníc).

Príklad 1:

Riešte v R rovnicu s neznámou *x* a parametrom $p \in R$.: $p^2(x-1) = px - 1$

Riešenie:

$$p^2(x-1) = px - 1$$
$$p^2x - p^2 = px - 1$$
$$p^2x - px = p^2 - 1$$
$$x(p^2 - p) = p^2 - 1$$

$$\boldsymbol{x.\ p.\ (p - 1) = (p - 1).(p + 1)}$$

p = 0: x.0.(-1) = (-1).1 ... ***0.x = – 1 ... $x \in \varnothing$***

p = 1: x.1.0 = 0.2 ... ***0.x = 0 ... platí $\forall x \in R$***

$p \neq 0 \wedge p \neq 1$ ... $x = \frac{p^2-1}{p^2-p} = \frac{(p+1)(p-1)}{p(p-1)} = \frac{p+1}{p}$

Výsledok sa obvykle zaznamená do tabuľky:

p	K
$p = 0$	$\{\ \}$
$p = 1$	R
$p \in R - \{0;1\}$	$\left\{\dfrac{p+1}{p}\right\}$

Príklad 2:

Riešte v R rovnicu s neznámou *x* a parametrom *p*∈*R*.: $(x-5)(p-3) = 2x$

Riešenie:

$$
\begin{aligned}
(x-5)(p-3) &= 2x \\
px - 3x - 5p + 15 &= 2x \\
px - 5x &= 5p - 15 \\
x \cdot (p-5) &= 5p - 15
\end{aligned}
$$

Pred pokračovaním v ďalších úpravách stanovíme podmienku pre parameter *p*:

$p \neq 5: \quad x = \dfrac{5p-15}{p-5}$

a dopočítame rovnicu pre vylúčenú hodnotu parametra *p*:

$p = 5: \quad (x-5)(5-3) = 2x$

$2x - 10 = 2x$ ... ***0.x = 10 ... x*** $\in \varnothing$

Výsledok:

p	K
$p = 5$	$\{\ \}$
$p \in R - \{5\}$	$\left\{\dfrac{5p-15}{p-5}\right\}$

Príklad 3:

Riešte v R rovnicu s neznámou *x* a parametrom *p*∈*R*.: $(p^2 - 1) \cdot x = p - 1$

Riešenie: ***(p – 1).(p + 1).x = p – 1***

p = – 1: – 2.0.x = – 2 ... ***0.x = – 2 ... x*** $\in \varnothing$

p = 1: 0.2.x = 0 ... ***0.x = 0 ... platí*** $\forall x \in R$

$p \neq -1 \wedge p \neq 1$: ... $x = \dfrac{p-1}{(p-1).(p+1)} = \dfrac{1}{p+1}$

***Výsledok**:*

p	K
$p = 1$	R
$p = -1$	$\{\ \}$
$p \in R - \{-1;1\}$	$\left\{\dfrac{1}{p+1}\right\}$

Príklad 4:

Riešte v R rovnicu s neznámou x a parametrom $a \in R$.: $\dfrac{x+a}{2} - \dfrac{2}{x+a} = \dfrac{x-a}{2}$

Riešenie:

$$\frac{x+a}{2} - \frac{2}{x+a} = \frac{x-a}{2}$$

$$x \neq -a$$

$$\frac{(x+a)^2 - 4}{2\cdot(x+a)} = \frac{x-a}{2}$$

$$x^2 + 2ax + a^2 - 4 = x^2 - a^2$$

$$2ax = 4 - 2a^2$$

$$ax = 2 - a^2$$

<u>*Diskusia:*</u> $\boldsymbol{a.x = 2 - a^2}$

a = 0: 0.x = 2 – 0 ... ***0.x = 2* ... *x ∈ ∅***

$a \neq 0$: $x = \dfrac{2-a^2}{a}$ ... **potrebné overiť podmienky**: **x ≠ – a** ...

$\dfrac{2-a^2}{a} \neq -a$ ... $2 - a^2 \neq - a^2$ ... $2 \neq 0$ ... platí vždy

***Výsledok**:*

a	K
$a = 0$	$\{\ \}$
$a \in R - \{0\}$	$\left\{\dfrac{2-a^2}{a}\right\}$

Úlohy – súhrn:

1) Riešte v R rovnicu s neznámou x a parametrom $b \in R$:

a) $(b^2 - 1)\, x = b - 1$ b) $5x - 2 = bx - b$

c) $b^2 x + 1 = x + b$ d) $b(x - 1) = x + b$

2) Vyriešte v R rovnicu $\frac{u+1}{v} + \frac{u+3}{v} = u + 1$

a) s neznámou u a parametrom v

b) s neznámou v a parametrom u

3) Riešte v R nerovnicu s neznámou x a parametrom $p \in R$:

a) $px < p^2$ b) $px < p - 1$ c) $p^2 x \geq p$

d) $(p+1)x \leq p^2 - 1$ e) $|p|.x < p^2$

Exponenciálne a logaritmické rovnice a nerovnice

Exponenciálna rovnica (nerovnica) je taká výroková forma, ktorá obsahuje neznámu v ***exponente***.

Logaritmická rovnica (nerovnica) je taká výroková forma, ktorá obsahuje neznámu v ***logaritmovanom výraze***.

Pri oboch typoch rovníc (nerovníc) sa využíva vlastnosť, že

každá exponenciálna – logaritmická funkcia je prostá .

Definícia:

Funkcia f je prostá práve vtedy, keď pre všetky $x_1, x_2 \in D(f)$: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Výrok V: ***Funkcia f je prostá*** $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D(f)$: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Funkcia f je ***rastúca*** $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D(f)$: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Funkcia f je ***klesajúca*** $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D(f)$: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Obmena výroku V: ***Funkcia f je prostá*** $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D(f)$: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Funkcia f je ***rastúca*** $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D(f)$: $f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow x_1 > x_2$

Funkcia f je ***klesajúca*** $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D(f)$: $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 > x_2$

Pri ***riešení exponenciálnych*** – ***logaritmických*** rovníc sa používa práve obmena implikácie:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 : \quad a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$\log_a x_1 = \log_a x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Niekedy je vhodné použiť aj prevod z logaritmického vyjadrenia do exponenciálneho:

$$\forall A \in R^+ - \{1\},\ \forall V(x) > 0 : \qquad \log_A V(x) = B \Leftrightarrow B^A = V(x)$$

Pri riešení logaritmických rovníc sa často využívajú aj vety o logaritmoch:

$$\forall a \in R^+ - \{1\},\ \forall U(x) > 0 \wedge V(x) > 0,\ \forall r \in R:$$

$$\log_a U(x).V(x) = \log_a U(x) + \log_a V(x)$$
$$\log_a U(x):V(x) = \log_a U(x) - \log_a V(x)$$
$$\log_a (U(x))^r = r.\log_a U(x)$$
$$\log_a V(x) = \frac{\log_z V(x)}{\log_z a}$$

<u>Poznámka:</u> Nakoľko ***logaritmované výrazy musia byť kladné***, vždy je potrebné ***pri riešení logaritmických rovníc určovať aj definičný obor rovnice***.

Exponenciálne rovnice a nerovnice

<u>Príklad 1:</u>

Riešte v R: $3^x = 81$ ... $3^x = 3^4$ (funkcia $y = 3^x$ je prostá) $\Rightarrow x = 4$ ... $K_R = \{4\}$

<u>Príklad 2:</u>

Riešte v R: $7^{2x-6} = 1$ ... $7^{2x-6} = 7^0 \Rightarrow 2x-6 = 0$ ... $x = 3$ ... $K_R = \{3\}$

<u>Príklad 3:</u>

Riešte v R: $5^x = 9^x$ ... $\frac{5^x}{9^x} = 1$ ... $\left(\frac{5}{9}\right)^x = \left(\frac{5}{9}\right)^0 \Rightarrow x = 0$ ... $K_R = \{0\}$

Príklad 4:

Riešte v R: $\boldsymbol{5^{x-5}.125^{x+1} = 25^{x-2}}$ ... $5^{x-5}.5^{3(x+1)} = 5^{2(x-2)}$ ... $5^{4x-2} = 5^{2x-4}$ $\Rightarrow \boldsymbol{4x-2 = 2x-4}$ ... $\boldsymbol{x = -1}$ ... $\boldsymbol{K_R = \{-1\}}$

Príklad 5:

Riešte v R: $\boldsymbol{49^{x+5} = (7^{x-1})^x}$ ... $7^{2x+10} = 7^{x.x-x}$ $\Rightarrow \boldsymbol{2x+10 = x^2 - x}$ ... $\boldsymbol{x^2 - 3x - 10 = 0}$ ... $\boldsymbol{K_R = \{-2; 5\}}$

Príklad 6:

Riešte v R: $\boldsymbol{9^{x+2} + 5.9^{x+1} = 14}$ ... $9^x.81 + 5.9^x.9 = 14$ ... $9^x.(81+45) = 14$ ... $126.9^x = 14$ ...
... $9^x = 14/126$ ... $9^x = 1/9$ ... $9^x = 9^{-1}$ $\Rightarrow \boldsymbol{x = -1}$ ... $\boldsymbol{K_R = \{-1\}}$

Poznámka: Jednoduché exponenciálne rovnice sa riešia ***úpravou na rovnosť mocnín s rovnakým základom***.

Príklad 7:

Riešte v R: $\boldsymbol{9^x - 3^x = 6}$ ... $(3^2)^x - 3^x - 6 = 0$ ... $(3^x)^2 - 3^x - 6 = 0$ ... ***nech*** $\boldsymbol{3^x = t \in R^+}$ ~ ***substitúcia*** ...
... $\boldsymbol{t^2 - t - 6 = 0}$ ... $\boldsymbol{t_1 = 3 \in R^+}$ ... $\boldsymbol{3^x = 3 \Rightarrow x = 1}$ ... $\boldsymbol{K_R = \{1\}}$
$\boldsymbol{t_2 = -2 \notin R^+}$ ... $\boldsymbol{3^x = -2}$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{x \in \emptyset}$

Poznámka: Niektoré exponenciálne rovnice je vhodné riešiť pomocou ***substitúcie***, napr. $\boldsymbol{a^x = t}$, pričom pre substituenta platí $\boldsymbol{t \in R^+}$.

Príklad 8:

Riešte v R: $\boldsymbol{3^{x+2} < 9}$ ... $3^{x+2} < 3^2$ $\wedge$ $3 \in (1; \infty)$ ~ funkcia $y = 3^x$ je ***rastúca*** $\Rightarrow \boldsymbol{x + 2 < 2}$ ... $\boldsymbol{x < 0}$ ...
... $\boldsymbol{K_R = (-\infty; 0)}$

Príklad 9:

Riešte v R: $\boldsymbol{5^{x-3} \geq 1}$ ... $5^{x-3} \geq 5^0$ $\wedge$ $5 \in (1; \infty)$ ~ funkcia $y = 5^x$ je ***rastúca*** $\Rightarrow \boldsymbol{x - 3 \geq 0}$ ... $\boldsymbol{x \geq 3}$ ...
... $\boldsymbol{K_R = \langle 3; \infty)}$

Príklad 10:

Riešte v R: $\boldsymbol{2^{x+5} > \frac{1}{8}}$ ... $\boldsymbol{2^{x+5} > 2^{-3}}$ $\wedge$ $2 \in (1; \infty)$ ~ funkcia $y = 2^x$ je ***rastúca*** $\Rightarrow \boldsymbol{x + 5 > -3}$ ... $\boldsymbol{x > -8}$ ...
... $\boldsymbol{K_R = (-8; \infty)}$

Príklad 11:

Riešte v R: $\left(\frac{1}{7}\right)^{3x-2} \leq \left(\frac{1}{49}\right)^{x+5}$ ... $\left(\frac{1}{7}\right)^{3x-2} \leq \left(\frac{1}{7}\right)^{2(x+5)}$ ... $\wedge$ $\frac{1}{7} \in (0; 1)$ ~ funkcia $y = \left(\frac{1}{7}\right)^x$ je ***klesajúca***
... $\Rightarrow \boldsymbol{3x - 2 \geq 2(x + 5)}$ ... $\boldsymbol{x \geq 12}$ ... $\boldsymbol{K_R = \langle 12; \infty)}$

Príklad 12:

Riešte v R: $\boldsymbol{9^{2x-1}.3^{x+3} > 81}$ ... $\boldsymbol{3^{2.(2x-1)}.3^{x+3} > 3^4}$ ... $3^{4x-2+x+3} > 3^4$ ... $\boldsymbol{3^{5x+1} > 3^4}$ $\wedge$ $3 \in (1; \infty)$ ~
funkcia $y = 3^x$ je ***rastúca*** $\Rightarrow$ $\boldsymbol{5x + 1 > 4}$ ... $\boldsymbol{x > 3/5}$ ... $\boldsymbol{K_R = (3/5; \infty)}$

Úlohy – súhrn:

Exponenciálne rovnice:

1. Riešte v R:
   a) $5^x = 25$ b) $2^{-x} = 8$ c) $2^{x-1} = 2$ d) $5^{x+2} = 125$
   e) $7^{2x} = 49$ f) $3^{-x} = 27$ g) $9^{2x+3} = 81$ h) $3^{x-5} = 243$
   i) $5^{-x+2} = 625$ j) $2^{2x-1} = 8$ k) $5^x = -25$ l) $6^{x-7} = 36$

2. Riešte v R:
   a) $2^x \cdot 3^x = 36$ b) $2^x = 0$ c) $125 = 0{,}2^{2x+1}$ d) $5^x = 1$
   e) $256 = 0{,}25^{-x+1}$ f) $5^{2x} \cdot 2^{2x} = 0{,}01$ g) $25 = 0{,}04^{-x-2}$ h) $216 = \left(\frac{1}{6}\right)^{x+1}$
   i) $8 = 0{,}0625^{x+3}$ j) $0 = 0{,}01^{-x+32}$ k) $5^{-x} \cdot 3^{-x} = 225$ l) $3^{2x+10} = 243$

3. Riešte v R:
   a) $3^x = 7^x$ b) $4^{2-x}.3^{2-x} = \frac{3}{36}$ c) $9^{x-7} = 27^x$ d) $2^{1+\log x} = 16$
   e) $5^{2x+1} = 4^{2x+1}$ f) $5^{-x} : 3^{-x} = \frac{9}{25}$ g) $16^{2x+3} = 0{,}25^{2x-1}$ h) $3^{2+\log x} = 27$
   i) $3^{(x-1)\cdot(x+1)} = 1$ j) $2^{2x+3}.7^{2x+3} = \frac{1}{14}$ k) $25^{3x-2} = 0{,}2^x$ l) $5^{-3+\log x} = 25$

4. Riešte v R:
   a) $2^{x^2-2x+1} = 2$ b) $9.3^{1-x} = 81^{-x}$ c) $\frac{1000\sqrt{0{,}01}}{1000^x} = 1$ d) $\sqrt[3]{3^{2x+3}}.\sqrt[4x]{3^{-2}}\sqrt[8]{9^{x+1}} = 27.\sqrt[8]{3^{2x}}$
   e) $5^{x^2+6x+11} = 25$ f) $2^{2x-1}.0{,}5 = 8^{-3x}$ g) $\frac{49\sqrt{343}}{7^{2x}} = 1$ h) $\sqrt[x+1]{2^{x-3}}.\sqrt[6]{16} = 64$
   i) $4^{x^2-x-4} = 0{,}0625$ j) $\frac{6^{2-x}}{36} = 216^{-2x+3}$ k) $\frac{125\sqrt{0{,}008}}{5^{x-2}.0{,}2} = 0{,}04$ l) $\sqrt[x-1]{25^x}.\sqrt[4]{5^{x-2}}\sqrt[3]{0{,}2} = \sqrt[4]{5^x}$

5. Riešte v R:
   a) $7^{2x+1} \cdot 7^{x-5} = 7^{3x+2} \cdot 7^{x-2}$ b) $4^{3x-1} \cdot 2^{x-2} \cdot 8^{5x-2} = 256$
   c) $17 \cdot 3^x + 3^{x+3} + 3^{x+4} = -3 \cdot 5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2}$ d) $2 . 3^x + 4 \cdot 5^x = 3^{x+3} - 5^{x+1}$

6. Riešte v R použitím vhodnej substitúcie:
   a) $4^x + 2^{x+1} = 24$ b) $-36 \cdot 3^x + 9^x + 243 = 0$ c) $3^{2x} - 3^x = 6$
   d) $5^{2x} + 2.5^x - 3 = 0$ e) $0{,}2^x + 0{,}04^x = 30$ f) $5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250$
   g) $\sqrt[x]{4} - 6.\sqrt[x]{2} + 8 = 0$ h) $2.4^x - 5.2^x + 2.4^{x-1} = 0$ i) $6^x - 4.3^x = 3.2^x - 12$
   j) $10^{2x-1} + 10^x = -2{,}5$ k) $2 \cdot 4^x - 4 \cdot 2^x = -4 + 2^x + 2^{2x}$ l) $9^x - 2 \cdot 3^{x+1} = -3^2$

Výsledky:

1. a) K={2} b) K={–3} c) K={2} d) K={1} e) K={1} f) K={–3} g) K={–1/2} h) K={10} i) K={–2} j) K={2} k) K={} l) K={9}
2. a) K={2} b) K={} c) K={–2} d) K={0} e) K={5} f) K={–1} g) K={–1} h) K={–4} i) K={–15/4} j) K={} k) K={–2} l) K={–5/2}
3. a) K={0} b) K={3} c) K={–14} d) K={1000} e) K={–1/2} f) K={2} g) K={–5/6} h) K={10} i) K={–1; 1} j) K={–2} k) K={4/7} l) K={10^5}
4. a) K={0; 2} b) K={–1} c) K={2/3} d) K={10/3} e) K={–3} f) K={2/11} g) K={7/4} h) K={–15/13} i) K={–1; 2} j) K={9/5} k) K={13/2} l) K={–3/5}
5. a) K={–4} b) K={9/11} c) K={3} d) K={2}

б. a) K={2} b) K={2; 3} c) K={1} d) K={0} e) K={–1} f) K={2} g) K={1} h) K={1} i) K={1; 2} k) K={0; 2} l) K={1}

Riešte dané **exponenciálne rovnice** v R:

1)$2^{3x} = 16$

2)$5^{3x-2} = 1$

3)$3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} = 13$

4)$2^{x^2-5x+6} = 1$

5)$9^{x+2} + 5.9^{x+1} = 14$

6)$\left(\frac{4}{25}\right)^{x+3} . \left(\frac{125}{8}\right)^{4x-1} = \frac{5}{2}$

7)$4.3^{x+1} - 3^{x-1} = 315$

8)$5.4^{x+1} - 4^{x+2} = 4^{x-1} + 240$

9)$27^{5x-6} . 81^{2x+3} = 9^{4x-2} . 3^{7x-2}$

10)$4^{x+1} - 8.4^{x-1} = 32$

11)$10^{x^2+2x+4} = 1000^{3x-2}$

12)$3^3 . 27^{2x-3} = 81^{3x-5}$

13)$3^{2x-1} + 3^{2x-2} - 3^{2x-4} = 315$

14)$3^{x+1} - 3^x - 162 = 0$

15)$3^{5x-4} + 3^{5x} = 82$

Riešte dané **exponenciálne nerovnice** v R:

16)$2^{x+1} < 4$

17)$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3} \leq \left(\frac{1}{8}\right)^{x+2}$

18)$2^{x-1} - 1 \leq 2^{x+2} + 2$

19)$\left(\frac{1}{8}\right)^{-4x+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)$

20)$4^{\frac{3x^2-1}{2}} < 8^{\frac{x+1}{3}}$

21)$5^{4x+1} + 4 > 629$

22)$2^{x+1} \geq 1$

23)$3^{x-1} \leq \frac{1}{9}$

24)$5^{x+2} \cdot 5^{x-1} > 125$

25)$4^{2x-1} \cdot 2^{x+3} < 16$

26)$\frac{3^{2x-5}}{3^{x+2}} \geq 9$

27)$\frac{2^{x+4}}{4^{1-x}} < \frac{1}{16}$

28)$10^{2x-3} \cdot \frac{100}{10^{x-4}} \leq \frac{10}{100^{x-3}}$

29)$2^{x^2-1} \geq 8$

30)$\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-3x} > 25$

Logaritmické rovnice a nerovnice

Príklad 1:

Riešte v R: $\boldsymbol{\log(6x-4) - \log 2 = 1}$ ... $6x-4>0$ ... $x>2/3$ ... $\boldsymbol{D_R = (2/3; \infty)}$
... $\boldsymbol{\log(6x-4) - \log 2 = \log 10}$ ... $\log(6x-4) = \log 2 + \log 10$ ...
... $\log(6x-4) = \log 20$ ... $\Rightarrow$ $\boldsymbol{6x-4=20}$ ... $\boldsymbol{x = 4 \in D_R}$ ... $\boldsymbol{K_R = \{4\}}$

Príklad 2:

Riešte v R: $\boldsymbol{\log(x+2) + \log(x-2) = \log(5x+2)}$ ... $x+2>0 \wedge x-2>0 \wedge 5x+2>0$ ... $x>2$ ...
... $\boldsymbol{D_R = (2; \infty)}$
... $\log(x+2).(x-2) = \log(5x+2)$ ... $(x+2).(x-2) = (5x+2)$ ... $\boldsymbol{x^2 - 5x - 6 = 0}$ ...
... $\boldsymbol{x_1 = -1 \notin D_R}$
... $\boldsymbol{x_2 = 6 \in D_R}$ ... $\boldsymbol{K_R = \{6\}}$

Príklad 3:

Riešte v R: $\boldsymbol{(\log_5 x)^2 - 2.\log_5 x = \log_5 x^3 - 4}$ ... $(\log_5 x)^2 - 2.\log_5 x = 3.\log_5 x - 4$ ...
... $\boldsymbol{(\log_5 x)^2 - 5.\log_5 x + 4 = 0}$ ... nech $\boldsymbol{\log_5 x = t}$ ~ substitúcia ... $\boldsymbol{t^2 - 5t + 4 = 0}$ ...
... $t_1 = 4$ ... $\boldsymbol{\log_5 x = 4}$ ... $\boldsymbol{x = 5^4}$ ... $\boldsymbol{x = 625}$ alebo
... $t_2 = 1$ ... $\boldsymbol{\log_5 x = 1}$ ... $\boldsymbol{x = 5^1}$ ... $\boldsymbol{x = 5}$ ... $\boldsymbol{K_R = \{5; 625\}}$

Príklad 4:

Riešte v R: $\boldsymbol{x^{3+4.\log x} = 10.x^6}$ ... $x>0$ ... $\boldsymbol{D_R = (0; \infty)}$; zlogaritmovaním rovnice dostaneme:
$(3+4\log x).\log x = \log 10 + 6.\log x$ ... $3.\log x + 4.\log^2 x = 1 + 6.\log x$ ...
... $4.\log^2 x - 3.\log x - 1 = 0$ ... nech $\boldsymbol{\log x = t}$ ~ substitúcia ... $4.m^2 - 3m - 1 = 0$ ...
... $t_1 = 1$ ... $\boldsymbol{\log x = 1}$ ... $\boldsymbol{x = 10^1}$ ... $\boldsymbol{x = 10}$ alebo
... $t_2 = -1/4$ ... $\boldsymbol{\log x = -1/4}$ ... $\boldsymbol{x = 10^{-1/4}}$ ... $\boldsymbol{x} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{10}}$ ... $\boldsymbol{K_R = \{\dfrac{1}{\sqrt[4]{10}}; 10\}}$

Príklad 5:

Riešte v R: $\boldsymbol{5^{3x} = 27}$ ... zlogaritmovaním rovnice dostaneme: $\boldsymbol{3x.\log 5 = \log 27}$ ... $x = \dfrac{\log 27}{3.\log 5}$ ...

... $x = \dfrac{3.\log 3}{3.\log 5} = \dfrac{\log 3}{\log 5}$ ... $\boldsymbol{K_R} = \left\{\dfrac{\log 3}{\log 5}\right\}$

Príklad 6:

Napíšte ***číslo 7 ako mocninu čísla 5***. ... $\boldsymbol{7 = 5^x}$ ... zlogaritmovaním rovnice dostaneme: $\boldsymbol{\log 7 = x.\log 5}$ ...

$$\ldots\ \boldsymbol{x} = \frac{\log 7}{\log 5} = \boldsymbol{\log_5 7}\ \ldots\ 7 = 5^{\log_5 7}$$

Príklad 7:

Riešte v R: $\boldsymbol{\log_2(5x-17) > 3}$ ... $5x-17>0$ ... $x>17/5$ ... $\boldsymbol{D_R = (17/5; \infty)}$ ... $\log_2(5x-17) > \log_2 2^3$ ...
... $\log_2(5x-17) > \log_2 8$ $\wedge$ $2 \in (1; \infty)$ ~ funkcia $y = \log_2 x$ je ***rastúca*** $\Rightarrow$ $\boldsymbol{5x-17>8}$ ...
... $\boldsymbol{x > 5}$ ... $\boldsymbol{x \in (5; \infty)}$ ... $\boldsymbol{K_R = D_R \cap (5; \infty) = \underline{(5; \infty)}}$

Príklad 8:

Riešte v R: $\log_{0,5}(x+3) < \log_{0,5}(15-2x)$ ... $x+3>0 \wedge 15-2x>0$ ... $x>-3 \wedge x<15/2$ ...
... $D_R = (-3;\ 15/2\,)$ ...
$\wedge\ 0{,}5 \in (0;1)$ ~ funkcia $y=\log_{0,5} x$ je ***klesajúca*** $\Rightarrow$ $x+3 > 15-2x$ ... $x>4$ ...
... $x \in (4;\infty)$ ... $K_R = D_R \cap (4;\infty) = \underline{(4;\ 15/2\ )}$

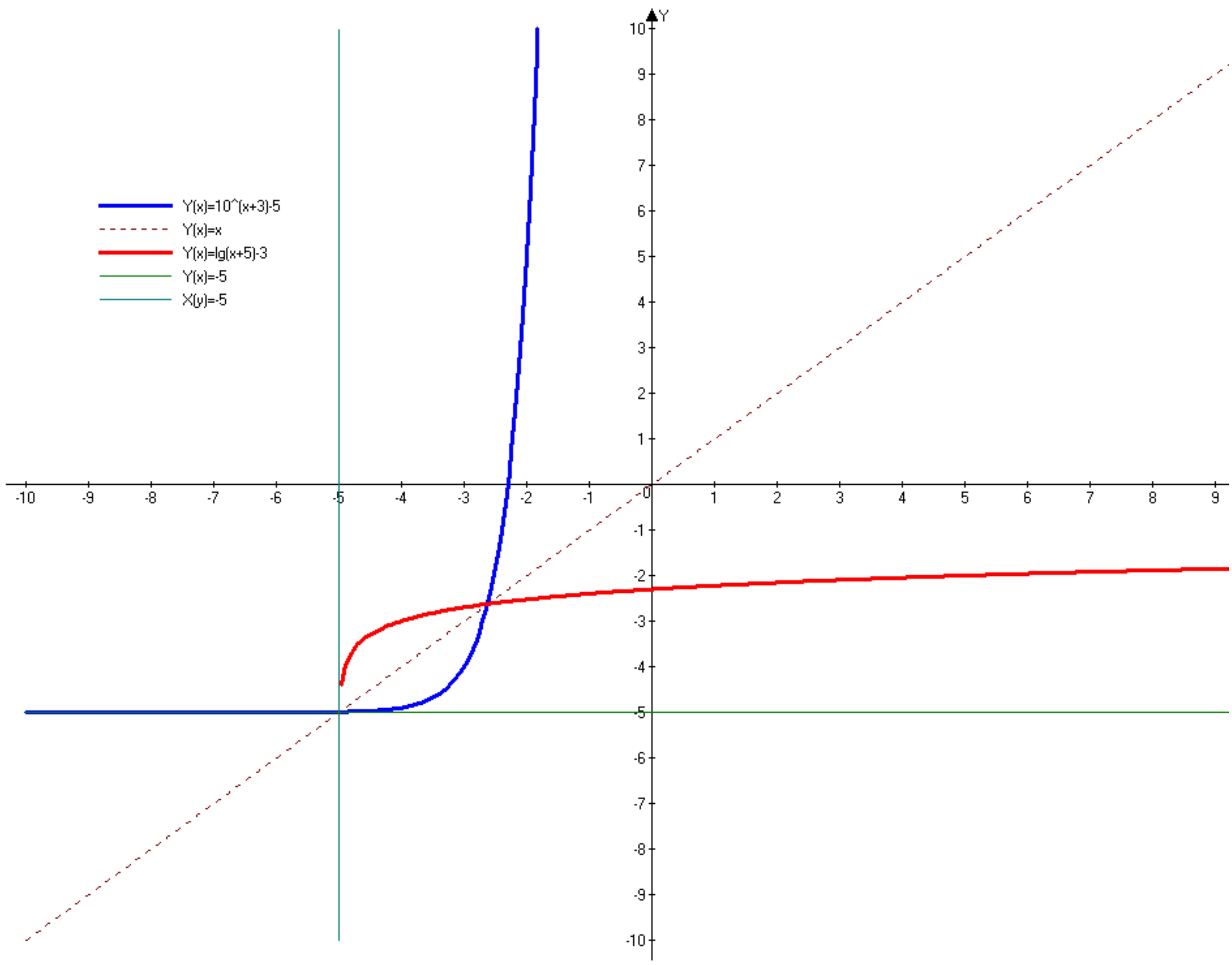
Príklad 8:

Napíšte rovnicu ***inverznej funkcie*** f^{-1} k ***funkcii*** $f\colon y = 10^{x+3} - 5$ a grafy oboch funkcií zobrazte v ***tej istej súradnicovej sústave***.

$f\colon y = 10^{x+3} - 5$ ... $y+5 = 10^{x+3}$ ... $\log(y+5) = (x+3).\mathbf{\log 10}$ ... $\log(y+5) = (x+3).\mathbf{1}$ ...
... $x = \log(y+5) - 3$ ... **x** a **y** ***navzájom vymeníme***:

$$f^{-1}\colon\ y = \log(x+5) - 3$$

$D(f) = R = H(f^{-1}) \wedge H(f) = (-5;\infty) = D(f^{-1})$



Úlohy – súhrn:

Riešte dané **logaritmické rovnice** v R:

1) $\log(3x-1)-\log 5=\log 10$

2) $\log(x+1)-\log(2x-3)=\log 3$

3) $\log(x+3)+\log(x-3)=\log(x+1)$

4) $\log(2x+10)=2.\log(x+1)$

5) $\log(5-x)-2.\log\sqrt{3-x}=\log 1$

6) $\log(7x+6)=\log 10+\log(3x-4)$

7) $\log(x+13)-\log(x-3)=\log 10-\log 2$

8) $\log(x+2)-\log(x-1)=\log 100-\log 4$

9) $2.\log(x-2)=\log(14-x)$

10) $\log(x+2)-\log(x-1)=\log 100+\log(x+2)$

11) $2.\log x=\log(5x-4)$

12) $\log(x+1)+\log(x-1)-\log x=\log(x+2)$

13) $\log(2x-3)+\log 3x=\log(8x-12)$

14) $\log(2x+9)-2.\log x+\log(x+4)=\log 100-\log 50$

Riešte dané **logaritmické nerovnice** v R:

15) $\log(x+2)<\log 10$

16) $\log(x^2-4x+3)<\log 8$

17) $\log_{0,5}(x^2-x-12)>\log_{0,5}(x+3)$

18) $\log_3(x+5)<\log_3(2x-1)$

19) $\log_5(x^2-17)\le\log_5(x+3)$

20) $\log(x+3)+\log(x-3)\ge 2.\log(x+1)$

21) $\log_2(4x-4)-\log_2(3-x)<\log_2 4$

22) $\log(2x-6)>2.\log x-\log(x-4)$

23) $\log_{0,5}x+\log_{0,5}(x+3)\ge 2.\log_{0,5}2$

24) $\log_3(x+2)<\log_3(3-x)$

25) $\log_{0,5}(2x-1)\le\log_{0,5}2$

26) $2.\log(x+1)<\log(x+4)+\log x$

27) $\log_2(4x-4)-\log_2(3-x)>\log_2 4$

28) $\log_{0,2}(x-2)+\log_{0,2}(x+2)\le 2.\log_{0,2}(4-x)$