

## 1.1. POJEM FUNKCIE - DEFINIČNÝ OBOR, OBOR HODNÔT

**Def. :** Funkciou na množine A sa nazýva predpis, ktorým je každému prvku množiny A priradené práve jedno reálne číslo.

Množina A sa nazýva **definičný obor funkcie – D(f)**. Je to množina, z ktorej môžeme dosadzovať do predpisu funkcie čísla.

**Def.:** Oborom hodnôt funkcie f - H(f) - sa nazýva množina všetkých y ∈ R, ku ktorým existuje aspoň jedno také x ∈ D(f), že y = f(x).

Hodnota funkcie pre dané číslo = funkčná hodnota = y, y = f(x)

**Def.: Grafom funkcie sa nazýva množina všetkých bodov X[x, f(x)], kde x ∈ D(f)**

Funkcia môže byť určená :

- a) predpisom
- b) určením niekoľkých usporiadaných dvojíc [x, f(x)]
- c) grafom
- d) určitou vlastnosťou

1) Daná je množina  $M = \{0, 1, 2, \dots, 10\}$ . Rozhodnite, či nasledujúce predpisy definujú funkciu  $f$ :

- a)  $f$  priraduje prvku z  $M$  jeho tretiu mocninu,
- b)  $f$  priraduje prvku z  $M$  jeho druhú odmocninu,
- c)  $f$  priraduje prvku z  $M$  jeho prevrátenú hodnotu.

Pri funkciách určite aj obor definície a obor hodnôt.

2) Určite definičný obor funkcie: a)  $f: y = 2x + 3$     b)  $g: y = \frac{1}{2x+3}$     c)  $h: y = \frac{x-\sqrt{x}}{x^2-1}$   
d)  $i: y = \frac{x+1}{x^2-6x-16}$     e)  $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x^2}}$     f)  $y = \sqrt{|x|-1}$

3) Nech  $f$  je funkcia definovaná na množine celých kladných čísel tak, že každému  $x \in \mathbb{Z}^+$  priradí funkčnú hodnotu podľa predpisu  $f: x \rightarrow 2x$ .

- a) Vypočítajte  $f(4)$ ,  $f(19)$  a  $f(301)$ .
- b) Určite hodnoty premennej  $x$ , pre ktoré funkcia nadobúda hodnoty  $f(x) = 14$ ,  $f(x) = 15$ ,  $f(x) = -214$ ,  $f(x) = 214$ .
- c) Načrtnite graf funkcie  $f$ .
- e) Existujú nejaké celé kladné čísla, ktoré nepatria do oboru hodnôt funkcie  $f$ ? Ak áno, uveďte príklad.
- f) Určite obor hodnôt funkcie  $f$ .
- g) Načrtnite graf funkcie  $f$ .

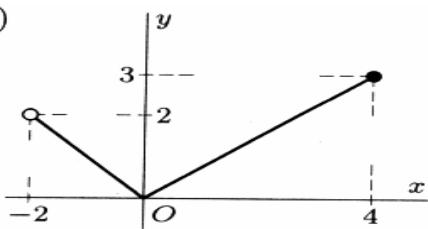
4) Zistite, či sa funkcie  $f: y = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 3x + 2}$  a  $g: y = \frac{x+1}{x-1}$  rovnajú.

5) Ak vyhodíme kameň kolmo hore rýchlosťou  $v \text{ m.s}^{-1}$ , jeho maximálna výška bude približne vyjadrená vzťahom  $h = f(v) = \frac{1}{20}v^2$ .

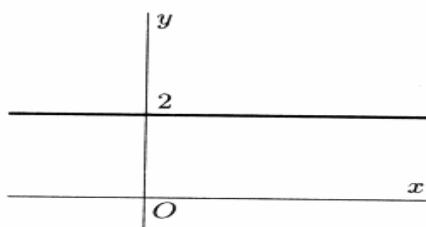
- a) Vypočítajte polovicu maximálnej výšky, ktorú kameň dosiahne, ak bol vyhodený postupne rýchlosťami  $10 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $20 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $30 \text{ m.s}^{-1}$ .
- b) Akou rýchlosťou má byť kameň vrhnutý kolmo hore ak má dosiahnúť vzdialenosť od bodu vrhu aspoň 125 m?

6) Rozhodnite, ktorý z grafov, znázornených na nasledujúcom obrázku, je grafom funkcie. Pri funkciách určite aj obor definície a obor hodnôt.

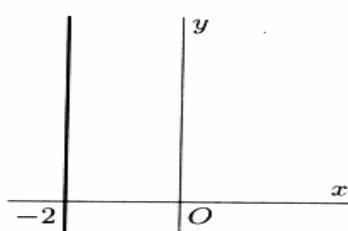
a)



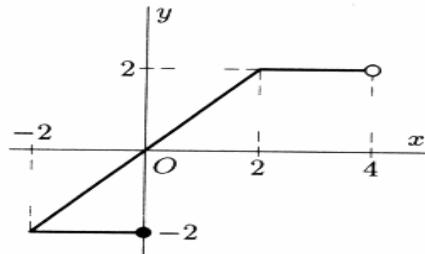
b)



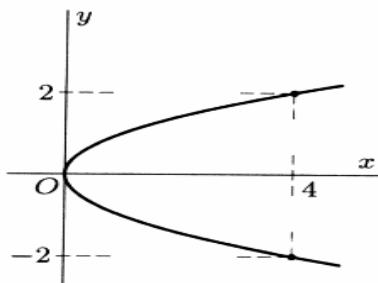
c)



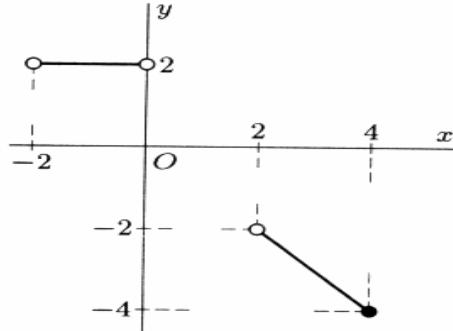
d)



e)



f)



- 1) Akou funkciou času je dráha telesa, ktoré sa pohybuje rovnomerne tak, že za jednu sekundu prejde dráhu a) 10 cm b) 1 m c) a km
- 2) Vyjadrite závislosť veľkosti uhla, o ktorý sa otocí a) veľká b) malá hodinová ručička, od času  $t$ .
- 3) Do gule s polomerom  $r$  je vpísaný rotačný kužeľ. Vyjadrite jeho plášť  $Q$  ako funkciu jeho strany  $s$ . V ktorom intervale premennej  $s$  je  $Q$  definované?
- 4) Na prevod teploty  $t_C$  z Celziovej stupnice na teplotu vo Fahrenheitovej stupnici platí vzťah  $t_F = \frac{9}{5}t_C + 32$ . Akou funkciou teploty v Celziovej stupnici je teplota odmeraná vo Fahrenheitovej stupnici?
- 5) Rozhodnite, či je daná závislosť funkciou:
  - a) Závislosť množstva vody v nádrži od času, ak do nádrže pritečie každú hodinu 10 hektolitrov vody.
  - b) Závislosť veku človeka od jeho telesnej výšky.

M Funkcie 1.ročník sivá: str.10 / Pr.1 , úlohy 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5  
str.14 / Pr.1 ,

M 2.ročník zelená: str.9 / cv. 1, 2, 1.3, 1.4, 1.5  
M 2 / 4: str.3 / cv. 7, 13, 14, 19, 20, 21, 25

## 1.2. LINEÁRNA FUNKCIA

### 5.2.1 Definovať lineárnu funkciu, poznat' jej obor definície a obor hodnôt

- 1) Dané sú funkcie  $f_1 : x \rightarrow x - 1$  a  $f_2 : x \rightarrow 1 - x$ . Určte  $H(f_n)$ , ak

  - a)  $D(f_n) = R$
  - b)  $D(f_n) = Z$
  - c)  $D(f_n) = N$
  - d)  $D(f_n) = (-3; 5)$

2) K funkciám  $f$  a  $g$  určeným predpisom a jedným z oborov:

  - a) Určite druhý obor.
  - b) Načrtnite graf.
  - c) Vypočítajte priesecníky grafu funkcie so súradnicovými osami.

3) Vyjadrite závislosť veľkosti uhla  $u$  (v stupňoch), o ktorý sa otočí

  - a) veľká hodinová ručička,
  - b) malá hodinová ručička,

od času  $t$  (v minútach).

### **5.2.2 Načrtňuj graf funkcie $y = kx + q$ na základe geometrického významu parametrov $k$ , $q$ .**

- 1) Načrtnite grafy nasledujúcich funkcií

  - $f: x \rightarrow 2 - x$
  - $g: x \rightarrow 2x + 1$
  - $h: y = 3x$
  - $2x + 3y - 6 = 0$
  - $3x - 2y - 6 = 0$
  - $4x - 5y = 20$
  - $14x - 12y = 21, x \in \langle -5; 10 \rangle$

2) Načrtnite graf lineárnej funkcie, ktorá prechádza bodom  $[3; 1]$  a so súradnicovou osou  $x$  zviera rovnaký uhol ako graf funkcie  $y = 2x + 3$ .

3) Dané sú funkcie:

$f_1(x) = 2x - 3,$	$f_2(x) = -2x + 3,$	$f_3(x) = 2x + 1,$
$f_4(x) = 0,5x + 3,$	$f_5(x) = 2x + 0,5;$	$f_6(x) = -x + 3,$
$f_7(x) = \frac{1}{3}x - 2,$	$f_8(x) = 3,$	$f_9(x) = \frac{1}{2}x - 3$

Rozhodnite, ktoré grafy sú prvkami toho istého zväzku priamok so stredom na súradnicovej osi y (priamky patria do toho istého zväzku priamok, ak prechádzajú spoločným bodom - stredom zväzku).

- 4) Dokážte graficky, že nasledujúce sústavy rovníc nemajú riešenie:

$$x + y = 1,$$

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 2$$

$$x - y = 4,$$

$$2x - 2y = 5$$

$$x + y = 3,$$

$$y = \frac{7 - 2x}{2}$$

- 5) Dokážte graficky, že nasledujúce sústavy rovnic majú nekonečne mnoho riešení:

a)  $x - y = 5$ ,  $3x = 15 + 3y$

b)  $x + y = 3$ ,  $\frac{x}{2} + 0,5y = 1,5$

c)  $x = 4 - y$ ,  $y = 4 - x$

### **5.2.3 Nájsť k danému argumentu funkčnú hodnotu a k danej funkčnej hodnote argument**

- 1) Daná je funkcia  $f$ :  $y = -2x + 3$

  - Určite  $f(0)$ ,  $f(3)$ ,  $f(-5)$ ,  $f(18)$ .
  - Určite, pre ktoré  $x$  sa  $f(x) = 1$ ,  $f(x) = -5$ .
  - Určite priesecníky grafu funkcie so súradnicovými osami  $x$ ,  $y$ .
  - Načrtnite graf funkcie  $f$ .

2) Podľa údajov výrobcu spotreba auta Vivace je 6 l benzínu na 100 km pri rýchlosťi 80 km/h a 8,1 l pri rýchlosťi 110 km/h. Odhadnite jeho spotrebu pri rýchlosťi 90 km/h

- 3) Na výrobu jednej skrutky spotrebuje automat  $20$  mm tyče, ktorá má na začiatku dĺžku  $4$  metre. Funkcia  $d = 4 - 0,02 \cdot p$  ( $p \in N \cup \{0\}$ ,  $p \leq 200$ ) udáva závislosť dĺžky zvyšnej časti tyče od počtu zhotovených skrutiek.
- Určite dĺžku zvyšnej časti tyče po vyrobení  $10, 50, 150, 160$  a  $220$  kusov skrutiek.
  - Určite počet vyrobencov skrutiek, ak zvyšná časť tyče má dĺžku  $10$  mm,  $50$  mm,  $150$  mm,  $160$  mm a  $220$  mm.
- 4) Daná je funkcia  $k : y = |2x + 6| + |4 - 2x|$ .
- Určite  $k(-3), k(0), k(1), k(4)$ .
  - Určite  $x$ , ak  $k(x) = 11, k(x) = 10, k(x) = 12, k(x) = 5, k(x) = -2$ .

#### 5.2.4 Rozhodnúť o monotónnosti lineárnej funkcie podľa hodnoty parametra $k$

1) Dokážte, že funkcia  $y = \frac{4}{3}x + 1$  je na svojom definičnom obore rastúca.

2) Dané sú funkcie:

$$f_1(x) = 2x - 3,$$

$$f_2(x) = -2x + 3,$$

$$f_3(x) = 2x + 1,$$

$$f_4(x) = 0,5x + 3,$$

$$f_5(x) = 2x + 0,5;$$

$$f_6(x) = -x + 3,$$

$$f_7(x) = \frac{1}{3}x - 2,$$

$$f_8(x) = 3,$$

$$f_9(x) = \frac{1}{2}x - 3$$

a) Rozhodnite, ktoré z daných funkcií sú rastúce (klesajúce).

b) Rozhodnite, ktoré grafy sú navzájom rovnobežné priamky.

3) Určite niekoľko konkrétnych hodnôt parametra  $a \in R$  tak, aby funkcia  $y = ax + b$

a) bola rastúca na množine  $R$ ,

b) bola klesajúca na množine  $R$ ,

c) ani nerástla, ani neklesala na množine  $R$ .

#### 5.2.5 Nájsť predpis lineárnej funkcie, ak sú dané jej body

1) Určite všetky lineárne funkcie, ktoré majú  $D(f) = R$  a ktorých prvkami sú usporiadane dvojice:

a)  $[0; 2], [1; 1]$

b)  $[0; \sqrt{3}], [3\sqrt{3}; \sqrt{3}]$

c)  $[1; -1], [-2; 5]$

d)  $[2; -2], [6; 0]$

2) Určite predpis funkcie, ktorej grafom je priamka prechádzajúca bodom  $[1; 3]$  a rovnobežná s priamkou  $y = -3x - 2$ .

#### 5.2.6 Zostrojiť graf lineárnej funkcie s absolútymi hodnotami

1) Zostrojte grafy funkcií:

a)  $y = 2x - 4$

b)  $y = 2|x| - 4$

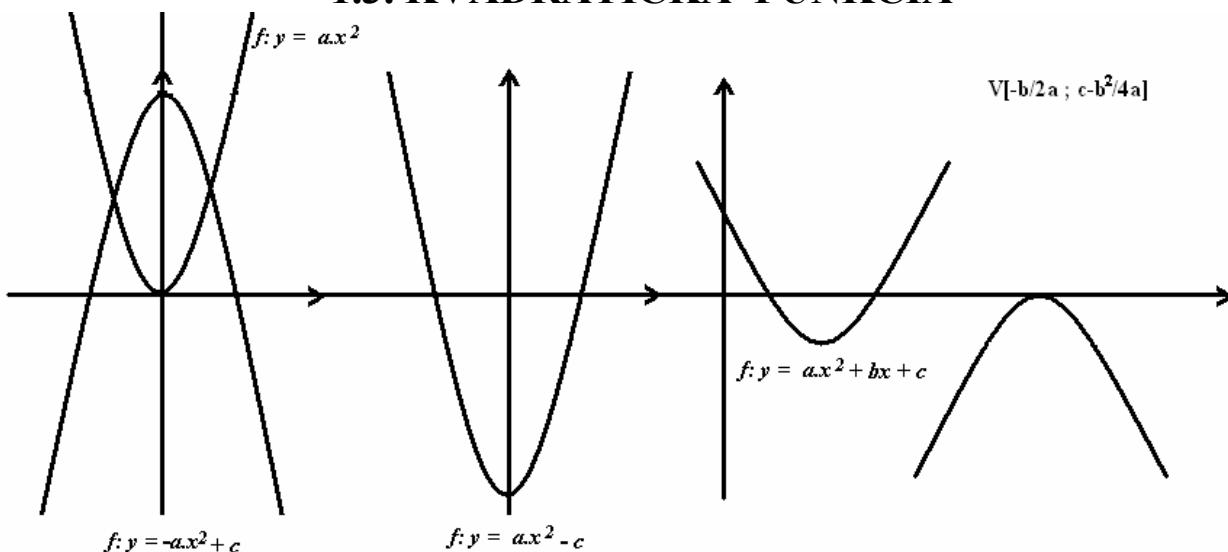
c)  $y = |2x - 4|$

2) Rozhodnite o párnosti, resp. nepárnosti funkcie  $f : y = x + |x|$ , nakreslite graf a opíšte jej vlastnosti.

3) Načrtnite graf funkcie  $y = |2x + 6| + |4 - 2x|$

4) Načrtnite graf funkcie  $y = |2 - x| + |2x - 7| + 3|1 + x| - 15, x \in \langle -3; 5 \rangle$

### 1.3. KVADRATICKÁ FUNKCIA



#### 5.3.1 Definovať kvadratickú funkciu, poznať jej obor definície a obor hodnôt

- 1) Určite funkciu, ktorá vyjadruje závislosť obsahu rovnostranného trojuholníka od dĺžky jeho strany. Určite aj obor definície a obor hodnôt tejto funkcie.
- 2) Nájdite funkciu, ktorá vyjadruje závislosť objemu valca od priemeru jeho podstavy, ak výška  $v = 5$  cm. Určite aj obor definície a obor hodnôt tejto funkcie.
- 3) Pri zvislom vrhu telesa smerom nahor sa výška  $s$  (v metroch) nad istým miestom menila s časom  $t$  (v sekundách) podľa vzťahu  $s = 20 + 40t - 5t^2$ . Určite maximálnu výšku, do ktorej teleso vystúpilo i čas trvania tohto výstupu.
- 4) Určite obor definície a obor hodnôt funkcie:

a) $f_1(x) = (x+2)^2 - 1$	b) $f_2(x) = 1 - x^2$	c) $f_3(x) = 2 - (x-1)^2$
d) $f_4(x) + 2 = \frac{1}{2}(x-3)^2$	e) $f_5(x) = 4x^2 + 12x + 9$	f) $f_6(x) = -x^2 + 2x - 10$

#### 5.3.2 Nájsť k danému argumentu funkčné hodnotu a k danej funkčnej hodnote argument

- 1) Daná je funkcia  $f: y = x^2 + 3x - 28$ .
  - a) Určite  $f(0)$ ,  $f(2)$ ,  $f(-1)$ .
  - b) Určite hodnoty premennej  $x$ , pre ktoré platí, že  $f(x) = 42$ ,  $f(x) = -28$ ,  $f(x) = -35$ ,
  - c) Určite priesecníky grafu funkcie  $f$  so súradnicovými osami.
- 2) Daná je funkcia  $f: y = x^2 - 4x - 12$ .
  - a) Určite  $f(0)$ ,  $f(7)$ ,  $f(-1)$ .
  - b) Určite hodnoty premennej  $x$ , pre ktoré platí, že  $f(x) = 9$ ,  $f(x) = -20$ ,
  - c) Určite priesecníky grafu funkcie  $f$  so súradnicovými osami.
- 3) Určite všetky kvadratické funkcie s  $D(f) = R$ , ktorých prvkami sú usporiadane dvojice
  - a)  $[0; 1], [2; -1], [1, -1]$
  - b)  $[3; 8], [1; -2], [-1; 4]$
- 4) Ktorá kvadratická funkcia  $f$  má tú vlastnosť, že  $f(1) = 3$ ,  $f(2) = 1$ ,  $f(3) = 2$ ?

#### 5.3.3 Vysvetliť geometrický význam parametrov $a$ , $c$ v súvislosti s grafmi funkcií $y = x^2$ a $y = ax^2 + bx + c$

- 1) Načrtnite grafy daných funkcií a pokúste sa charakterizovať ich vzájomný vzťah:
  - a)  $f_1: y = x^2$ ,  $f_2: y = 3x^2$ ,  $f_3: y = 0,3x^2$ ,  $f_4: y = -3x^2$
  - b)  $g_1: y = x^2$ ,  $g_2: y = x^2 - 3$ ,  $g_3: y = x^2 + 3$ ,  $g_4: y = -2x^2 + 3$
  - c)  $h_1: y = x^2$ ,  $h_2: y = (x-3)^2$ ,  $h_3: y = (x+3)^2$ ,  $h_4: y = -(x-3)^2 - 2$
  - d)  $k_1: y = x^2$ ,  $k_2: y = 2(x-3)^2 + 1$ ,  $k_3: y = 2x^2 - 12x + 19$ ,  $k_4: y = -2x^2 + 12x - 19$
- 2) Načrtnite graf funkcie  $f: y = 2x^2 - 2$  a opíšte jej vlastnosti.

3) Načrtnite grafy funkcií:

a)  $f : y = |x^2 - 2x - 2|$

b)  $g : y = |-x^2 + 4x + 1|$

4) Aký má predpis kvadratická funkcia, ktorej graf je parabola s osou v osi  $+y$  a vrcholom v začiatku sústavy súradníč? Ako znie rovnica tejto paraboly, keďže jej vrchol posunutý:

- a) o dve jednotky v smere osi  $y$ , b) o jednu jednotku v smere osi  $x$ ,  
c) o tri jednotky v smere osi  $-y$ , d) o štyri jednotky v smere osi  $-x$ .

Ako bude znieť rovnica paraboly v prípadoch c) a d), ak os paraboly je rovnobežná s osou  $-y$ ?

#### 5.3.4 Nájsť vrchol a os paraboly, ktorá je grafom kvadratickej funkcie, určiť jej nulové body a načrtnúť ju

1) Nájdite súradnice vrcholu paraboly  $y = -4x^2 + \frac{1}{3}x + 27$

2) Zostrojte graf funkcie  $f : y = x^2 - 6x + 8$  a opíšte jej vlastnosti.

3) Načrtnite graf funkcie  $h : x \rightarrow 4 - x^2$ ,  $-3 \leq x \leq 1$  a nájdite jej extrémy.

4) Určte predpis funkcie, ktorej grafom je parabola s vrcholom  $V[2; -3]$  prechádzajúca bodom  $A[0; 1]$ . Parabolu načrtnite a určite jej nulové body.

#### 5.3.5 Určiť, podľa načrtnutého grafu, obor hodnôt a intervale monotónnosti

1) Rozhodnite, či je funkcia  $f : y = -x^2$  ohraničená a nájdite jej intervale monotónnosti i  $H(f)$ .

2) Načrtnite graf funkcie  $f : y = x^2 - 4x$ ,  $x \in (-\infty; 4)$ . Určte jej  $H(f)$  a intervale monotónnosti.

3) Dané sú funkcie:

$$f_1(x) = x^2 + 2x - 15, \quad f_2(x) = x^2 - 4x + 6, \quad f_3(x) = 4x^2 + 12x + 9,$$

$$f_4(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{5}{2}, \quad f_5(x) = -x^2 + 4x, \quad f_6(x) = -x^2 + 2x - 10, \quad f_7(x) = -x^2 + 4x - 4,$$

a) Načrtnite ich grafy a určite obory hodnôt.

b) Určte intervale monotónnosti a extrémy.

c) Zistite, kedy majú jednotlivé funkcie funkčné hodnoty kladné a kedy záporné.

4) Načrtnite graf funkcie  $f : y = |x^2 - 6x + 8|$  a opíšte jej vlastnosti.

5) Načrtnite graf funkcie  $f : y = |x^2 - x - 6| + 4$ . Nájdite intervale monotónnosti tejto funkcie.

#### 5.3.6 Vysvetliť na konkrétnych príkladoch súvislost' medzi hodnotami diskriminantu kvadratickej rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ a grafom funkcie $y = ax^2 + bx + c$

1) Daný je parametrický systém funkcií  $y = x^2 - 3x + c$ , kde  $c \in R$ . Slovne opíšte vzájomnú polohu všetkých funkcií daného parametrického systému. Určte  $c$  tak, aby táto funkcia

- a) nemala spoločný bod s osou  $x$ ,  
b) mala práve jeden spoločný bod s osou  $x$ ,  
c) mala práve dva spoločné body s osou  $x$ .

2) Daná funkcia je funkcia  $f : y = ax^2 - 2$ . Vysvetlite, ako a či závisí počet prienikov grafu  $f$  s  $x$ -ovou osou od parametra  $a$ .

3) Určte hodnoty parametrov  $a$ ,  $b$ ,  $c$  predpisu kvadratickej funkcie  $y = ax^2 + bx + c$  a hodnotu diskriminantu  $D$  kvadratickej rovnice  $ax^2 + bx + c = 0$  tak, aby grafom funkcie bola parabola, ktorá je:

- a) obrátená "nahor" (má maximum) a pretína os  $x$ ,  
b) obrátená "nahor" (má maximum) a dotýka sa osi  $x$ ,  
c) obrátená "nahor" (má maximum) a nepretína os  $x$ ,  
d) obrátená "nadol" (má minimum) a pretína os  $x$ ,  
e) obrátená "nadol" (má minimum) a dotýka sa osi  $x$ ,  
f) obrátená "nadol" (má minimum) a nepretína  $x$ .

## 1.4. PÁRNOSŤ A NEPÁRNOSŤ FUNKCIE

Def.: **Funkcia f** sa nazýva **párna** práve vtedy, ak súčasne platí : 1.  $\forall x \in D(f)$  aj  $-x \in D(f)$   
2.  $\forall x \in D(f)$  platí:  $f(x) = f(-x)$

Graf párnej funkcie je súmerný podľa osi y.

Def.: **Funkcia f** sa nazýva **nepárna** práve vtedy, ak súčasne platí : 1.  $\forall x \in D(f)$  aj  $-x \in D(f)$   
2.  $\forall x \in D(f)$  platí:  $-f(x) = f(-x)$

Graf nepárnej funkcie je súmerný podľa počiatku súradnicového systému.

M1 funkcie sivá : str. 19 / Pr.2,

Zistite, ktoré z daných funkcií sú párne, nepárne.:

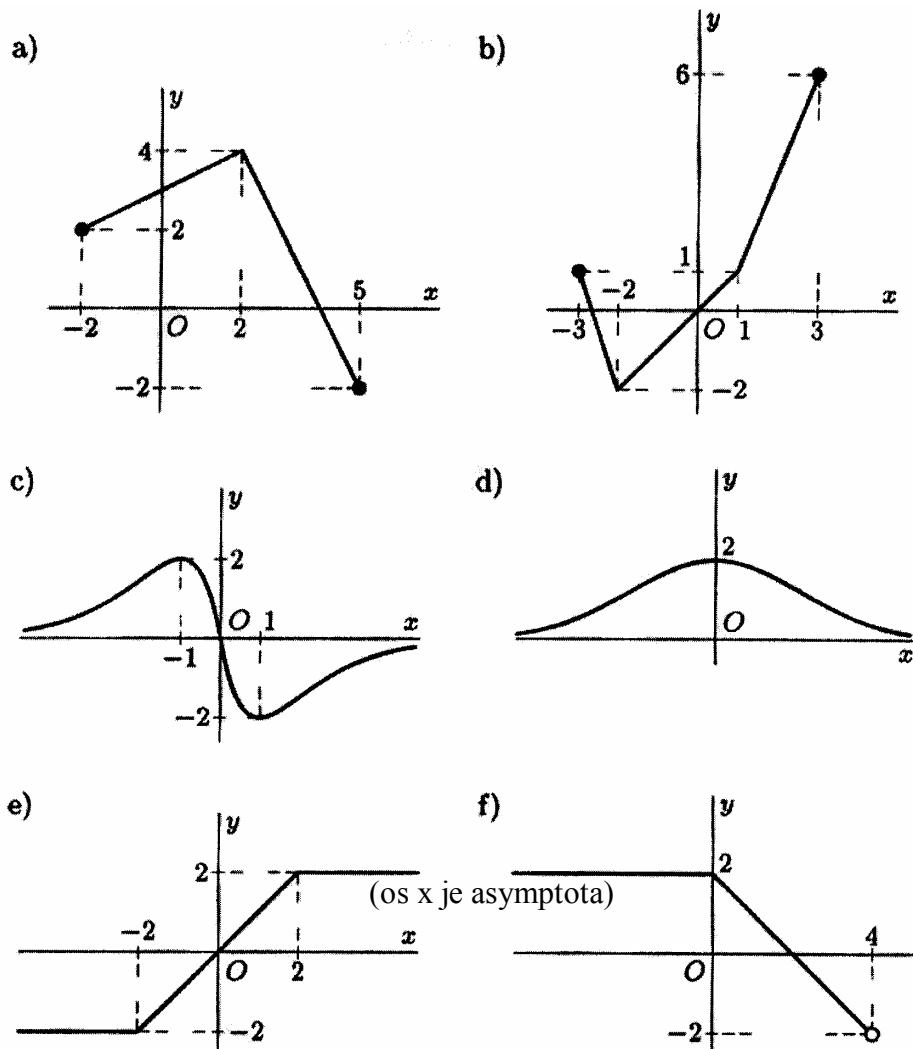
a) f:  $y = 2x$ ,  $x \in \langle -4, 5 \rangle$       b) f:  $y = 2 - x$       c) f:  $y = 1/x^3$       d) f:  $y = x^2 : (x^2 + 4)$

M1 funkcie sivá : str. 20 / 1.8,

Zistite, ktoré z daných funkcií sú párne, nepárne.:

a) f:  $y = x + x^3$       b) f:  $y = 1 / (1 + x^2)$       c) f:  $y = 1/x$       d) f:  $y = 1 / x^4$   
e) f:  $y = 1 + \sqrt{x}$       f) f:  $y = x^2 + x$

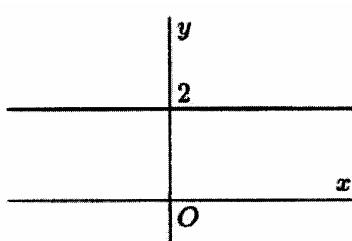
1) Určte intervaly monotónnosti a extrémy funkcií znázornených na obrázku. Rozhodnite o párnosti, resp. nepárnosti nasledujúcich funkcií



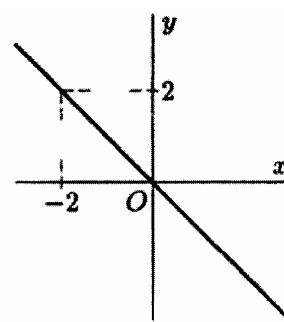
2) Rozhodnite o párnosti, resp. nepárnosti funkcií a)  $y = x|x|$ , b)  $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ , c)  $y = 1 + \sqrt{x}$

3) Rozhodnite, ktoré z funkcií znázornených na obrázkoch 1 a 2 sú párne alebo nepárne.

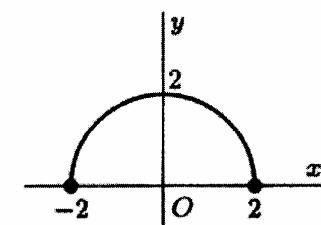
a)



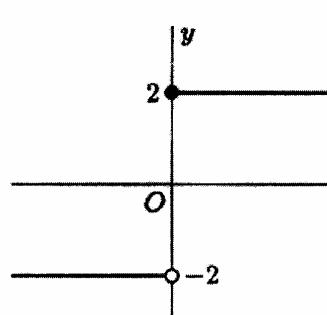
b)



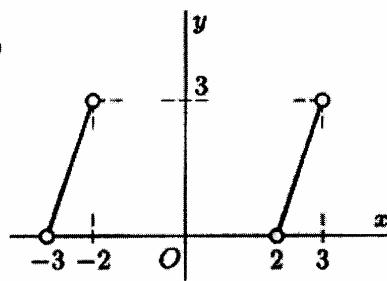
c)



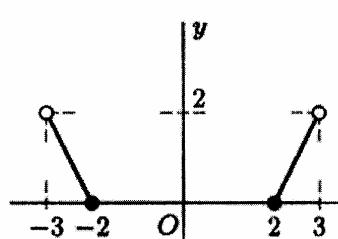
d)



e)

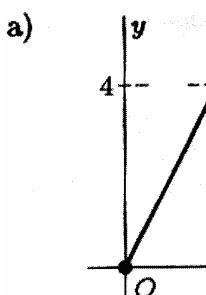


f)

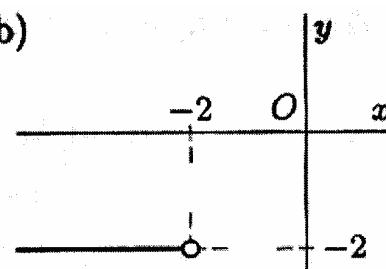


4) Čo môžete povedať o hodnote  $f(0)$ , ak je známe, že  $f$  je funkcia a) párna b) nepárna?

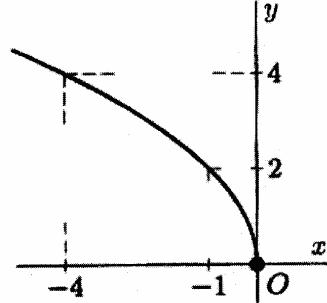
5) Doplňte grafy na obrázku 3 tak, aby znázorňovali a) párne funkcie b) nepárne funkcie



b)



c)

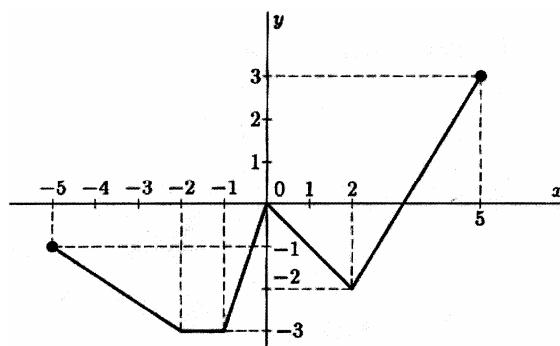


6) Na obrázku je znázornený graf funkcie  $f$ .

a) Určite jej vlastnosti (obor definície, obor hodnôt, intervale monotónnosti, ...).

b) Upravte časť grafu tak, aby nová funkcie bola na intervale  $\langle -5; 5 \rangle$  nepárna.

c) Upravte časť grafu tak, aby nová funkcie bola na intervale  $\langle -5; 5 \rangle$  párna.



## 1.5. RASTÚCA A KLESAJÚCA FUNKCIA

Funkcia  $f$  je na množine  $M \subseteq D(f)$  **rastúca**, ak pre  $\forall x_1, x_2 \in M$ ,  $x_1 < x_2$  platí  $f(x_1) < f(x_2)$ .

Funkcia  $f$  je na množine  $M \subseteq D(f)$  **klesajúca**, ak pre  $\forall x_1, x_2 \in M$ ,  $x_1 < x_2$  platí  $f(x_1) > f(x_2)$ .

Funkcia  $f$  je na množine  $M \subseteq D(f)$  **nerastúca**, ak pre  $\forall x_1, x_2 \in M$ ,  $x_1 < x_2$  platí  $f(x_1) \geq f(x_2)$ .

Funkcia  $f$  je na množine  $M \subseteq D(f)$  **neklesajúca**, ak pre  $\forall x_1, x_2 \in M$ ,  $x_1 < x_2$  platí  $f(x_1) \leq f(x_2)$ .

## 1.6. ÚLOHY O FUNKCIÁCH

### VLASTNOSTI FUNKCIÍ :

1. Definičný obor
2. Obor hodnôt
3. Nulové body
4. Monotónnosť funkcie
5. Márnosť, nepárnosť funkcie
6. Kladná, záporná funkcia
7. Ohraničenosť funkcie
8. Maximum, minimum funkcie
9. Spojitosť funkcie
10. Funkcia prostá, neprostá

## OHRANIČENOSŤ FUNKCIE

Funkcia  $f$  je na  $D(f)$  **ohraničená zdola**, ak existuje také číslo  $d \in \mathbb{R}$ , že pre  $\forall x \in D(f)$  platí:  $f(x) \geq d$ .

Funkcia  $f$  je na  $D(f)$  **ohraničená zhora**, ak existuje také číslo  $h \in \mathbb{R}$ , že pre  $\forall x \in D(f)$  platí:  $h \leq f(x)$ .

Funkcia  $f$  je na  $D(f)$  **ohraničená**, ak je ohraničená zhora aj zdola.

## KLADNÁ, ZÁPORNÁ FUNKCIA

Funkcia  $f$  je na množine  $M \subseteq D(f)$  **kladná**, ak pre  $\forall x \in M$ , platí  $f(x) > 0$ .

Funkcia  $f$  je na množine  $M \subseteq D(f)$  **záporná**, ak pre  $\forall x \in M$ , platí  $f(x) < 0$ .

## MAXIMUM, MINIMUM FUNKCIE

Funkcia  $f$  má v bode **a** na množine  $M \subseteq D(f)$  **lokálne maximum** práve vtedy, ak pre  $\forall x \in M$ , platí  $f(x) \leq f(a)$ .

Funkcia  $f$  má v bode **b** na množine  $M \subseteq D(f)$  **lokálne minimum** práve vtedy, ak pre  $\forall x \in M$ , platí  $f(x) \geq f(b)$ .

Funkcia  $f$  má v bode **a** na množine  $D(f)$  **globálne maximum** práve vtedy, ak pre  $\forall x \in D(f)$ , platí  $f(x) \leq f(a)$ .

Funkcia  $f$  má v bode **b** na množine  $D(f)$  **globálne minimum** práve vtedy, ak pre  $\forall x \in D(f)$ , platí  $f(x) \geq f(b)$ .

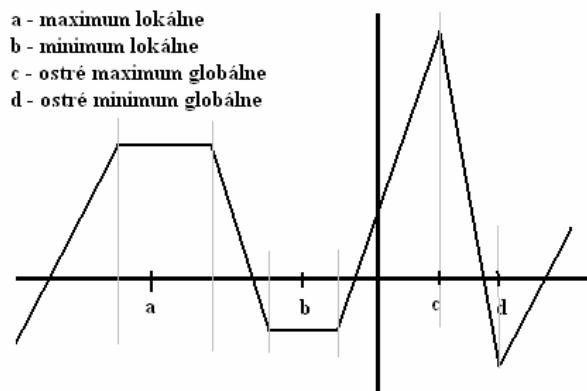
Funkcia  $f$  má v bode **a** na množine  $M \subseteq D(f)$  **lokálne ostré maximum** práve vtedy, ak pre  $\forall x \in M$ , platí  $f(x) < f(a)$ .

Funkcia  $f$  má v bode **b** na množine  $M \subseteq D(f)$  **lokálne ostré minimum** práve vtedy, ak pre  $\forall x \in M$ , platí  $f(x) < f(b)$ .

## SPOJITOSŤ FUNKCIE

Funkcia je **spojitá na  $D(f)$**  ak je spojité v každom bode tohto intervalu.

Funkcia je **spojitá v bode c**, ak je definovaná  $f(c)$ .

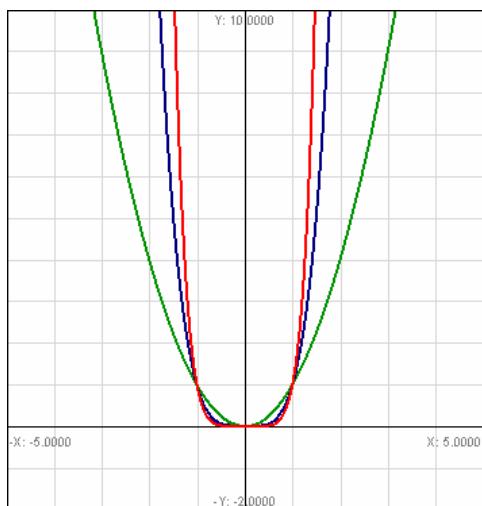


## PROSTÁ FUNKCIA

Funkcia  $f$  je na množine  $M \subseteq D(f)$  **prostá** práve

vtedy, ak pre  $\forall x_1, x_2 \in M$  platí: ak  $x_1 \neq x_2$  tak,  $f(x_1) \neq f(x_2)$ . Každá rastúca alebo klesajúca funkcia je prostá.

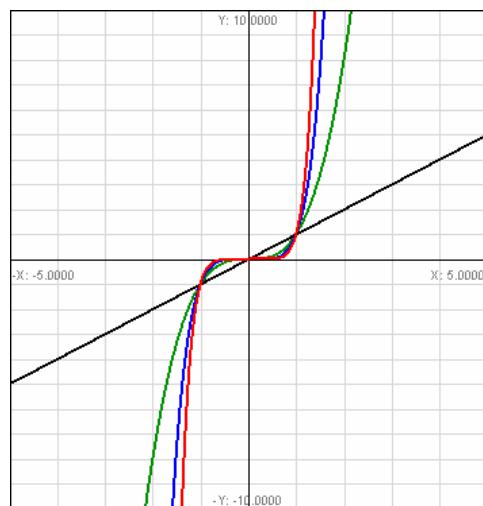
## 1.7. MOCNINOVÉ FUNKCIE



**f:**  $y = x^n, n \in \mathbb{N}$

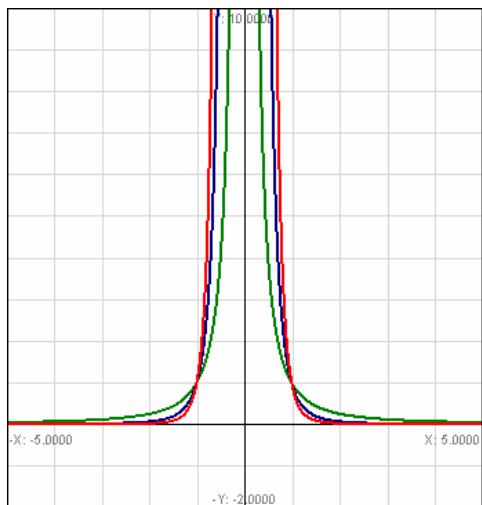
a) n párne

n = 2 špeciálny prípad – kvadratická funkcia



b) n nepárne

n = 1 špeciálny prípad – lineárna funkcia



**f:**  $y = x^n, n \in \mathbb{N}$

c) n párne



d) n nepárne

	n párne	n nepárne	-n párne	-n nepárne
<b>D(f)</b>	R	R	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
<b>H(f)</b>	$\langle 0, \infty \rangle$	R	$(0, \infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
<b>monotónnosť</b>	klesajúca $(-\infty, 0)$ rastúca $\langle 0, \infty \rangle$	rastúca R	rastúca $(-\infty, 0)$ klesajúca $(0, \infty)$	klesajúca $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$
<b>spojitosť</b>	spojitá	spojitá	nespojitá	nespojitá
<b>párnosť</b>	párna	nepárna	párna	nepárna
<b>prostá</b>	nie je prostá	prostá	nie je prostá	prostá
<b>maximum</b>	nemá	nemá	nemá	nemá
<b>minimum</b>	$x = 0, f(x) = 0$	nemá	nemá	nemá

### 5.5.1 Definovať mocninovú funkciu $y = x^n$ , $n \in \mathbb{Z}$ , poznat jej obor definície

1) Dané sú funkcie:

$$\begin{array}{llll} f_1(x) = x; & f_2(x) = x^2; & f_3(x) = x^3; & f_4(x) = x^4; \\ f_5(x) = x^{-1}; & f_6(x) = x^{-2}; & f_7(x) = x^{-3}; & f_8(x) = x^{-4}. \end{array}$$

Rozdeľte ich do skupín podľa rovnakého oboru definície.

2) Určite obor definície nasledujúcich funkcií:

- a)  $f_1(x) = x^3$ ;  $f_2(x) = x^3 + 1$ ;  $f_3(x) = (x+1)^3$ ;
- b)  $f_1(x) = x^4$ ;  $f_2(x) = x^4 - 2$ ;  $f_3(x) = (x-2)^4$ ;
- c)  $f_1(x) = x^{-2}$ ;  $f_2(x) = x^{-2} - 1$ ;  $f_3(x) = (x-1)^{-2}$ ;
- d)  $f_1(x) = x^{-3}$ ;  $f_2(x) = x^{-3} + 2$ ;  $f_3(x) = (x+2)^{-3}$ .

3) Majme parametrický systém funkcií (vzhľadom na  $n$ )  $y = x^n$ , kde  $n \in \mathbb{Z}$  a  $x \in \mathbb{R}$ . Bude sa medzi týmito funkciami nachádzať aj taká, ktorej grafom je celá priamka? Koľko bude takých funkcií a pri akom  $n$ ? Bude medzi nimi aj funkcia  $y = 1$ ?

### 5.5.2 Opísat' na príkladoch vlastnosti mocninových funkcií s párnym(nepárnym) $n$

1) Dané sú funkcie:

$$\begin{array}{llll} f_1(x) = x; & f_2(x) = x^2; & f_3(x) = x^3; & f_4(x) = x^4; \\ f_5(x) = x^5; & f_6(x) = x^6; & f_7(x) = x^7; & f_8(x) = x^8. \end{array}$$

- a) Rozdeľte ich do skupín podľa rovnakého oboru funkčných hodnôt.
- b) Rozdeľte ich do skupín podľa toho, či sú párne alebo nepárne.
- c) Rozdeľte ich do skupín podľa toho, či sú prosté alebo neprosté.
- d) Určite ich intervale monotónnosti.
- e) Určite, ktoré z nich sú ohraničené zdola, ktoré zhora.
- f) Určite ich maximum, resp. minimum.

2) Načrtnite graf funkcie a)  $y = x^{123}$  b)  $y = x^3 + 5$  a zistite jej vlastnosti.

3) Načrtnite graf a opíšte vlastnosti nasledujúcich funkcií:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} f_1(x) = x^3; f_2(x) = x^3 + 1; f_3(x) = (x+1)^3; \\ \text{b)} f_1(x) = x^4; f_2(x) = x^4 - 2; f_3(x) = (x-2)^4. \end{array}$$

4) Určte inverznú funkciu k funkcií  $f: y = x^3$  (ak existuje), nájdite jej definičný obor i obor hodnôt a porovnajte ich s oborom definície a oborom hodnôt danej funkcie.

### 5.5.3 Opísat' na príkladoch vlastnosti mocninových funkcií s kladným (záporným) $n$

1) Dané sú funkcie:  $f_1(x) = x$ ;  $f_2(x) = x^2$ ;  $f_3(x) = x^3$ ;  $f_4(x) = x^4$ ;  $f_5(x) = x^{-1}$ ;  $f_6(x) = x^{-2}$ ;  $f_7(x) = x^{-3}$ ;  $f_8(x) = x^{-4}$ .

- a) Rozdeľte ich do skupín podľa rovnakého oboru funkčných hodnôt.
- b) Rozdeľte ich do skupín podľa toho, či sú párne alebo nepárne.
- c) Rozdeľte ich do skupín podľa toho, či sú prosté alebo neprosté.
- d) Určite ich intervale monotónnosti.
- e) Určite, ktoré z nich sú ohraničené zdola, ktoré zhora.
- f) Určite ich maximum, resp. minimum.

2) Načrtnite graf a opíšte vlastnosti nasledujúcich funkcií:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} f_1(x) = x^{-2}; f_2(x) = x^{-2} - 1; f_3(x) = (x-1)^{-2}; \\ \text{b)} f_1(x) = x^{-3}; f_2(x) = x^{-3} + 2; f_3(x) = (x+2)^{-3}. \end{array}$$

3) Načrtnite graf a opíšte vlastnosti nasledujúcich funkcií:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} f_1(x) = -x^4; f_2(x) = x^{-4}; f_3(x) = -x^{-4}; \\ \text{b)} f_1(x) = -x^5; f_2(x) = x^{-5}; f_3(x) = -x^{-5}. \end{array}$$

## 1.15. LINEÁRNE LOMENÁ FUNKCIA

**Racionálna funkcia :**

$$f : y = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} \quad m, n \in N, a_m, a_{m-1} \dots a_1, a_0, b_m, b_{m-1} \dots b_1, b_0 \in R$$

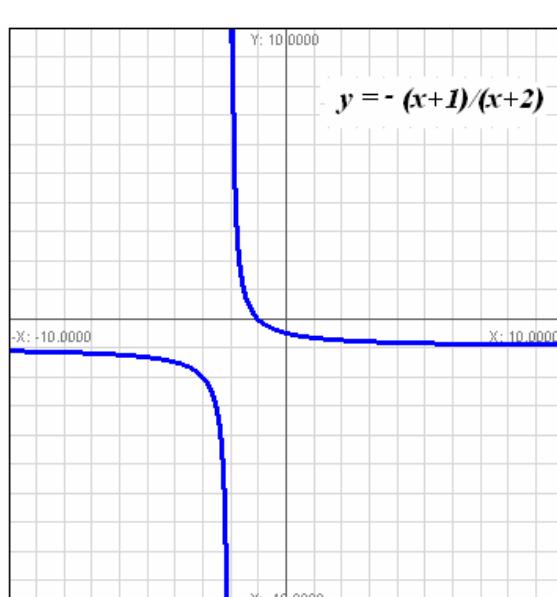
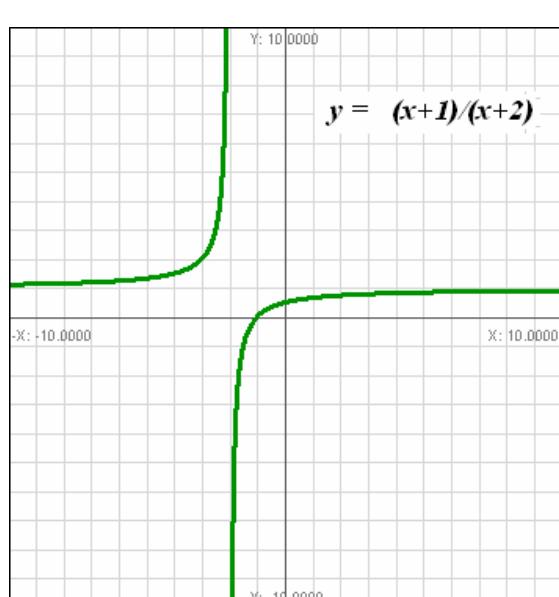
**Lineárne lomená funkcia :**

$$f : y = \frac{a_1 x + a_0}{b_1 x + b_0} \quad a_1, a_0, b_1, b_0 \in R \quad \text{alebo} \quad f : y = \frac{ax + b}{cx + d} \quad a, b, c, d \in R, \quad c \neq 0, \quad bc - ad \neq 0$$

$$D(f) = R - \left\{ -\frac{d}{c} \right\} \quad H(f) = R - \left\{ \frac{a}{c} \right\}$$

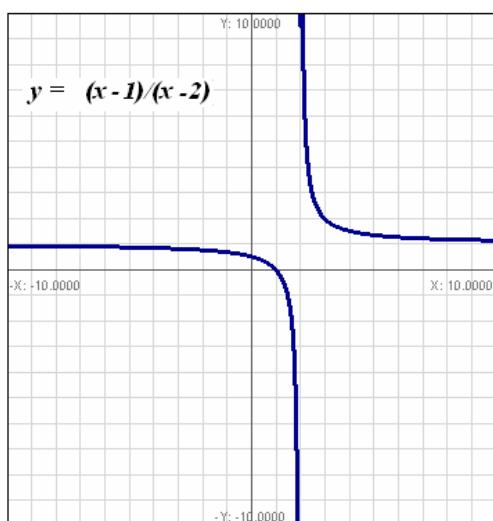
**Každú LLF možno upraviť na tvar :**  $y - y_0 = \frac{k}{x - x_0}$       kde     $O[x_0, y_0]$    je začiatok posunutej súradnicovej sústavy

**Grafom LLF je posunutá hyperbola.**

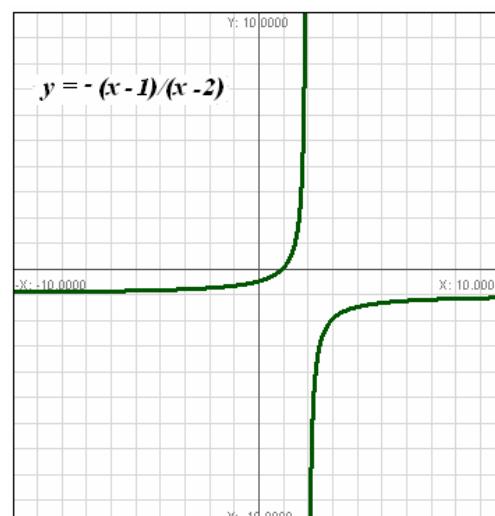


$$f_1 : y = \frac{x+1}{x+2} = \frac{x+2-1}{x+2} = 1 - \frac{1}{x+2} \quad O[-2, 1]$$

$$f_2 : y = -\frac{x+1}{x+2} = \frac{-(x+1)}{x+2} = \frac{-(x+2)+1}{x+2} = -1 + \frac{1}{x+2} \quad O[-2, -1]$$



$O[2, 1]$



$O[2, -1]$

**Pr.** Určite definičný obor, obor hodnôt funkcie a urobte náčrt funkcie :  $f : y = \frac{5x - 1}{5x + 2}$

**Postup :** 1. D(f) :  $5x + 2 \neq 0$ ,  $x \neq -2/5$

$$2. H(f) : y. (5x+2) = 3x-1$$

$$5xy + 2y = 3x - 1$$

$$5xy - 3x = -1 - 2y$$

$$x. (5y - 3) = -1 - 2y \rightarrow 5y - 3 \neq 0 \rightarrow y \neq 3/5$$

$$3. \text{Graf: a) } f : y = x^{-1} \quad \text{b) } f : y = 11/25 \cdot x^{-1}$$

c) otočenie okolo x-ovej osi d) posunutie v smere x o  $-2/5$ , v smere y o  $3/5$ .

$$\begin{aligned} f : y &= \frac{3x-1}{5x+2} = \frac{3x}{5x+2} - \frac{1}{5x+2} = \frac{3x \cdot \frac{5}{3}}{(5x+2) \cdot \frac{5}{3}} - \frac{1}{5x+2} = \frac{5x+2-2}{(5x+2) \cdot \frac{5}{3}} - \frac{1}{5x+2} = \frac{5x+2}{(5x+2) \cdot \frac{5}{3}} - \frac{2}{(5x+2) \cdot \frac{5}{3}} - \frac{1}{5x+2} = \\ &= \frac{1}{5} - \frac{6}{(5x+2) \cdot 5} - \frac{1}{5x+2} = \frac{3}{5} - \left( \frac{6+5}{(5x+2) \cdot 5} \right) = \frac{3}{5} - \frac{11}{(5x+2) \cdot 5} = \frac{3}{5} - \frac{11}{25x+10} = \frac{3}{5} - \frac{\frac{11}{25}}{\frac{25x+10}{25}} = \frac{3}{5} - \frac{11}{25} \cdot \frac{1}{x+2} \end{aligned}$$

**Pr.** Určite definičný obor, obor hodnôt funkcie a urobte náčrt funkcie :

$$1. f : y = \frac{x-1}{5x+1}$$

$$4. f : y = \frac{-2+3x}{4x-3}$$

$$7. f : y = \frac{-3x-1}{5x-1}$$

$$10. f : y = \frac{-1}{3x+2}$$

$$2. f : y = \frac{x-1}{2x+2}$$

$$5. f : y = \frac{x+1}{5x+2}$$

$$8. f : y = \frac{2x}{5x+2}$$

$$11. f : y = \frac{-1}{-4x+2}$$

$$3. f : y = \frac{2x-3}{4x+2}$$

$$6. f : y = \frac{4x-1}{3x+2}$$

$$9. f : y = \frac{-1+x}{4x+2}$$

$$12. f : y = \frac{3}{2x-1}$$

**Pr.** Určite definičný obor, obor hodnôt funkcie a urobte náčrt funkcie :

$$1. f : y = \frac{x+1}{2x+1}$$

$$11. f : y = \frac{-2-3x}{4x+3}$$

$$21. f : y = \frac{-3x-0,1}{5x-0,2}$$

$$31. f : y = \frac{-1}{2x+3}$$

$$2. f : y = \frac{-x+1}{2x+2}$$

$$12. f : y = \frac{3x-1}{-5x+2}$$

$$22. f : y = \frac{2x}{0,2x+2}$$

$$32. f : y = \frac{-1}{-4x+5}$$

$$3. f : y = \frac{x-2}{-2x+2}$$

$$13. f : y = \frac{6x-1}{-3x+2}$$

$$23. f : y = \frac{-1+0,5x}{4x+2}$$

$$33. f : y = \frac{0,3}{2x-1}$$

$$4. f : y = \frac{x+2}{-2x+3}$$

$$14. f : y = \frac{-2+3x}{-4x-3}$$

$$24. f : y = \frac{-3x-0,5}{5x-2,5}$$

$$34. f : y = \frac{-x}{3x+2}$$

$$5. f : y = \frac{-x+1}{-2x+4}$$

$$15. f : y = \frac{-6x+1}{5x-3}$$

$$25. f : y = \frac{10-2x}{5x+2}$$

$$35. f : y = \frac{-0,2x}{-4x+2}$$

$$6. f : y = \frac{-x-2}{-2x+0,55}$$

$$16. f : y = \frac{-2+4x}{-3x+2}$$

$$26. f : y = \frac{-11+x}{4x-3}$$

$$36. f : y = \frac{3}{0,2x-1}$$

$$7. f : y = \frac{1-x}{-1-2x}$$

$$17. f : y = \frac{-1+3x}{-4x-3}$$

$$27. f : y = \frac{-3x-1}{2x-5}$$

$$37. f : y = \frac{-1}{0,3x+0,2}$$

$$8. f : y = \frac{x-3}{-2-x}$$

$$18. f : y = \frac{x+9}{5x+3}$$

$$28. f : y = \frac{2x-7}{5x+2}$$

$$38. f : y = \frac{-1}{-7x+0,5}$$

$$9. f : y = \frac{x-7}{-2x+9}$$

$$19. f : y = \frac{4x-2}{3x-1}$$

$$29. f : y = \frac{-1+0,1x}{4x+2}$$

$$39. f : y = \frac{0,5x}{2x-0,1}$$

$$10. f : y = \frac{x+11}{-2x+13}$$

$$20. f : y = \frac{-2-3x}{6x-1}$$

$$30. f : y = \frac{-3x+5}{5x-3}$$

$$40. f : y = \frac{-1}{0,3x+0,2}$$

**5.1.3 Načrtnut, na základe poznania grafu funkcie  $y = f(x)$ , grafy funkcií  $y = -f(x)$ ,**

$$y = f(x) + k, \quad y = |f(x)|, \quad y = f(x + q), \quad y = f(x + q) + k$$

1) Daná je funkcia  $f(x) = y = x^2$ . Načrtnite jej graf i graf funkcie:

a)  $y = -f(x)$       b)  $y = f(x) + 3$       c)  $y = |f(x)|$       d)  $y = f(x - 3)$       e)  $y = f(x - 3) + 2$

2) Načrtnite graf funkcie  $f$ , ktorej  $D(f) = (-2; 7)$  a  $H(f) = \langle -2; 3 \rangle$ . Potom načrtnite aj graf funkcie: a)

y = -f(x)    b) y = f(x) + 3    c) y = |f(x)|    d) y = f(x - 3)    e) y = f(x - 3) + 2

#### **5.4.1 Definovať lineárne lomenú funkcie. opísat' vzťah medzi lineárne lomenou funkciou a nepriamou úmernosťou**

1) Načrtnite v tej istej súradnicovej sústave grafy funkcií:  $f_1(x) = \frac{1}{x}$ ,  $f_2(x) = -\frac{1}{x}$ ,  $f_3(x) = -\frac{1}{x} - 1$ ,

$$f_4(x) = -\frac{x+1}{x}, \quad f_5(x) = -\frac{1}{x+2}, \quad f_6(x) = -\frac{1}{x+2} - 1, \quad f_7(x) = -\frac{x+3}{x+2}$$

Určite aj obor definície a obor hodnôt každej tejto funkcie.

2) Obsah  $S$  pravouhlého trojuholníka je  $12 \text{ cm}^2$ . Určite funkciu, ktorá vyjadruje závislosť medzi jeho odvesnami.

3) Pri konštantnom napäti je prúd nepriamo úmerný odporu vodiča. Nájdite funkciu, ktorá udáva túto závislosť, ak viete, že pri odpore  $350 \Omega$  je prúd  $30 \text{ mA}$ .

4) Obdlžniková parcela s rozmermi  $a = 24 \text{ m}$ ,  $b = 15 \text{ m}$  sa má vymeniť za stavebné miesto obdlžnikového tvaru rovnakej výmery, a to s jedným rozmerom.

a)  $5 \text{ m}$ ,      b)  $30 \text{ m}$ ,      c)  $90 \text{ m}$ . Určite druhý rozmer.

5) Daná je funkcia  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Načrtnite graf funkcie:

a)  $g_1(x) = f(x) + 1$       b)  $g_2(x) = 2 \cdot f(x)$       c)  $g_3(x) = f(x + 1)$   
d)  $g_4(x) = f(2x)$       e)  $g_5(x) = f(x + 1) + 1$       f)  $g_6(x) = f(-x)$

#### **5.4.2 Nájst' k danému argumentu funkčnému hodnotu a k danej funkčnej hodnote argumentu**

1) Doplňte tabuľku hodnôt pre funkcie: 

x	1	2	3	-3,5					10
f(x)					-1	10	4	-4	

$$f_1(x) = \frac{1}{x}; \quad f_2(x) = \frac{2}{x}; \quad f_3(x) = -\frac{2}{x};$$

$$f_4(x) = -\frac{3,5}{x}; \quad f_5(x) = \frac{1}{2x}; \quad f_6(x) = -\frac{2}{3x};$$

2) Pri stálej sile ( $F = 60 \text{ N}$ ) je súčin tlaku (v Pa) a plochy (v  $\text{m}^2$ ), na ktorú sila pôsobí konštantný. Doplňte tabuľku:

plocha v $\text{m}^2$	1	2	3	15	12	6	12	15	2
tlak v Pa									

3) Daná je funkcia  $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$ . Určte: a)  $f(x)$  pre  $x \in \{-5; -3; -1; 1; 2; 5\}$ ,

a)  $x$  pre  $f(x) \in \{-5; -3; -1; 1; 2; 5\}$ .

#### **5.4.3 Určiť obor definície ľubovoľnej lineárnej lomenej funkcie**

3) Pumpou čerpajúcou 3,5 litra vody za sekundu sa vyčerpá stavebná jama za 10 hodín. Ako dlho bude čerpať vodu z tejto jamy pumpa, ktorá vyčerpá za sekundu 7 (10,5; 6; 25) litrov vody? Určite aj obor definície tejto funkcie.

4) Určite obor definície funkcie:

$$a) f_1(x) = \frac{2x - 3}{3x - 1};$$

$$b) f_2(x) = \frac{6x - 7}{4x - 2};$$

$$c) f_3(x) = \frac{6x - 4}{6 - 9x};$$

$$d) f_4(x) = \frac{2x + 3}{x - 1};$$

$$e) f_5(x) = \frac{-x + 2}{3x - 1};$$

$$f) f_6(x) = \frac{2x - 4}{-x + 2}.$$

Viete určiť aj obor hodnôt jednotlivých funkcií?

5) Určite obor definície funkcie:

$$a) f_1(x) = 1 - \frac{2x - 3}{3x - 1};$$

$$b) f_2(x) = 1 + \frac{6x - 7}{4x - 2};$$

$$c) f_3(x) = -\frac{6x - 4}{6 - 9x};$$

$$d) f_4(x) = \frac{2}{3} + \frac{2x + 3}{x - 1};$$

$$e) f_5(x) = \frac{-x + 2}{3x - 1} - 2;$$

$$f) f_6(x) = \frac{2x - 4}{-x + 2} + 3.$$

Viete určiť aj obor hodnôt jednotlivých funkcií?

#### 5.4.4 Určiť nulové body grafu ľubovoľnej lineárnej lomenej funkcie

1) Určite všetky  $x \in D(f)$ , pre ktoré je  $f(x) > 0$ .

$$a) f_1(x) = \frac{2x - 3}{3x - 1};$$

$$b) f_2(x) = \frac{6x - 7}{4x - 2};$$

$$c) f_3(x) = \frac{6x - 4}{6 - 9x};$$

$$d) f_4(x) = \frac{2x + 3}{x - 1};$$

$$e) f_5(x) = \frac{-x + 2}{3x - 1};$$

$$f) f_6(x) = \frac{2x - 4}{-x + 2}.$$

3) Určite všetky  $x \in D(f)$ , pre ktoré je  $f(x) < 0$ .

$$a) f_1(x) = 1 - \frac{2x - 3}{3x - 1};$$

$$b) f_2(x) = 1 + \frac{6x - 7}{4x - 2};$$

$$c) f_3(x) = -\frac{6x - 4}{6 - 9x};$$

$$d) f_4(x) = \frac{2}{3} + \frac{2x + 3}{x - 1};$$

$$e) f_5(x) = \frac{-x + 2}{3x - 1} - 2;$$

$$f) f_6(x) = \frac{2x - 4}{-x + 2} + 3.$$

3) Načrtnite graf funkcie  $f(x) = \left| \frac{1}{x} + 1 \right|$ .

#### 5.4.5 Určiť asymptoty grafu ľubovoľnej lineárnej lomenej funkcie

1) Určite asymptoty funkcie:

$$a) f_1(x) = \frac{2x - 3}{3x - 1};$$

$$b) f_2(x) = \frac{6x - 7}{4x - 2};$$

$$c) f_3(x) = \frac{6x - 4}{6 - 9x};$$

$$d) f_4(x) = \frac{2x + 3}{x - 1};$$

$$e) f_5(x) = \frac{-x + 2}{3x - 1};$$

$$f) f_6(x) = \frac{2x - 4}{-x + 2}.$$

2) Určite asymptoty funkcie:

$$a) f_1(x) = 1 - \frac{2x - 3}{3x - 1};$$

$$b) f_2(x) = 1 + \frac{6x - 7}{4x - 2};$$

$$c) f_3(x) = -\frac{6x - 4}{6 - 9x};$$

$$d) f_4(x) = \frac{2}{3} + \frac{2x + 3}{x - 1};$$

$$e) f_5(x) = \frac{-x + 2}{3x - 1} - 2;$$

$$f) f_6(x) = \frac{2x - 4}{-x + 2} + 3.$$

3) Určite asymptoty funkcie a pomocou nich sa pokúste určiť obor hodnôt danej funkcie:

$$a) f_1(x) = \frac{3}{3x - 1};$$

$$b) f_2(x) = \frac{x}{4x - 2};$$

$$c) f_3(x) = \frac{6x - 4}{9x};$$

$$d) f_4(x) = 1 - \frac{2x + 3}{x - 1};$$

$$e) f_5(x) = \frac{-x}{3x - 1};$$

$$f) f_6(x) = \frac{2x - 4}{x + 2}.$$

## 1.18. PROSTÉ FUNKCIE - DEFINÍCIA

## 1.19. PROSTÉ FUNKCIE - GRAF

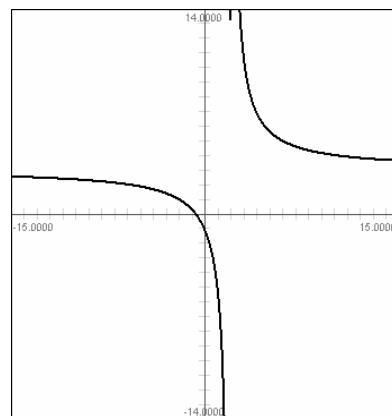
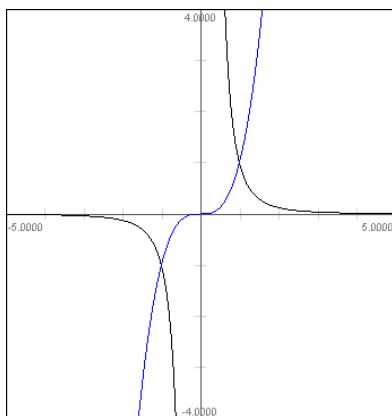
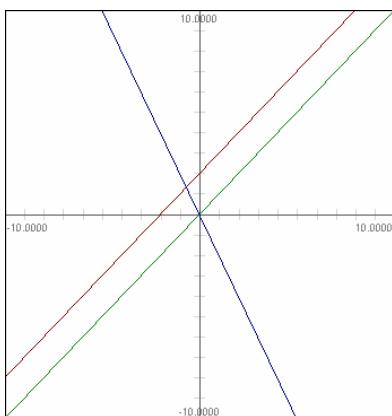
## 1.20. PROSTÉ FUNKCIE - RIEŠENIE ÚLOH

### PROSTÁ FUNKCIA

Funkcia  $f$  je na množine  $M \subseteq D(f)$  **prostá** práve vtedy, ak pre  $\forall x_1, x_2 \in M$  platí: ak  $x_1 \neq x_2$  tak,  $f(x_1) \neq f(x_2)$ . Každá rastúca alebo klesajúca funkcia je prostá.

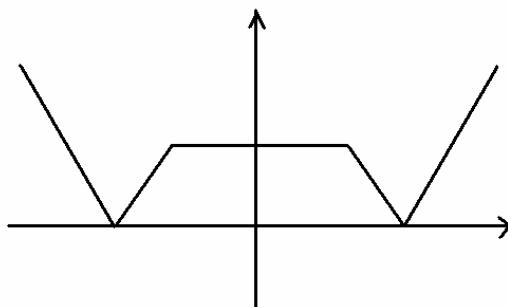
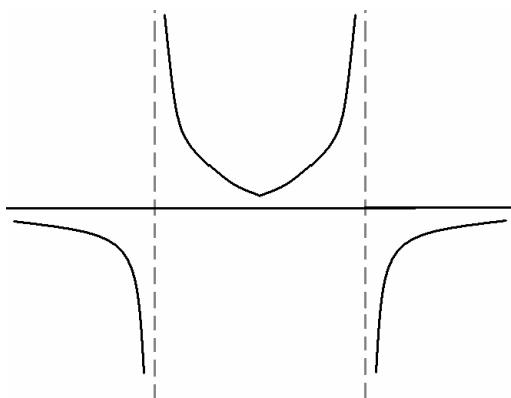
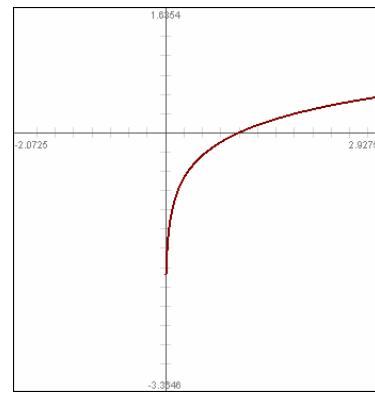
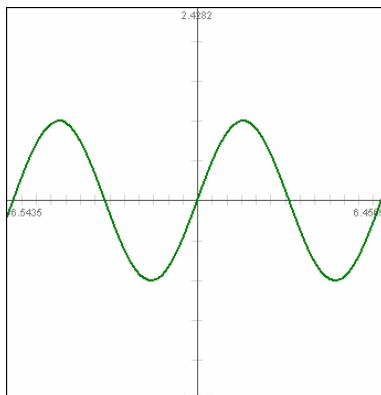
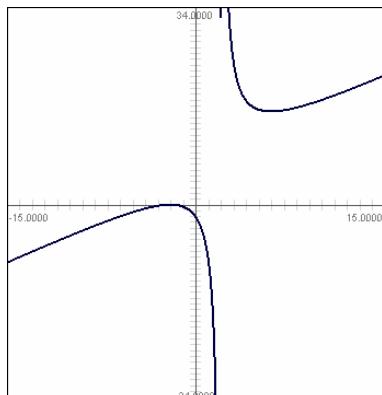
### Grafy prostých funkcií :

- 1.lineárne funkcie  $y = x$ ,  $y = x+2$ ,  $y = -x$     2.mocninová funkcia pre n nepárne  $y = x^3$ ,  $y = x^{-3}$



3. lineárne lomená funkcia

Pr. Určite, ktoré z daných funkcií sú prosté :



Pr. Nakreslite niekol'ko prostých funkcií, a niekol'ko funkcií, ktoré nie sú prosté.

## 1.21. INVERZNÁ FUNKCIA - VLASTNOSTI

## 1.22. INVERZNÁ FUNKCIA - GRAF

## 1.23. ÚLOHY NA INVERZNÚ FUNKCIU

Def.: Nech  $f$  je prostá funkcia na množine  $A$ , nech  $B$  je jej obor hodnôt ( $f(A)=B$ ).

Funkciu  $f^{-1}$  z množiny  $B$  do množiny  $A$  definovanú predpisom  $f^{-1}(b) = a$  nazývame inverznou funkciou k funkcií  $f$  práve vtedy, ak  $f(a) = b$ .

Graf inverznej funkcie  $f^{-1}$  je symetrický s grafom funkcie  $f$  podľa osi  $y = x$ .

Pr.

$$f : y = \frac{12x - 5}{4x + 8}$$

$$D(f) = R - \{-2\} \quad H(f) = R - \{3\}$$

$$y \cdot (4x + 8) = 12x - 5$$

$$4xy + 8y = 12x - 5$$

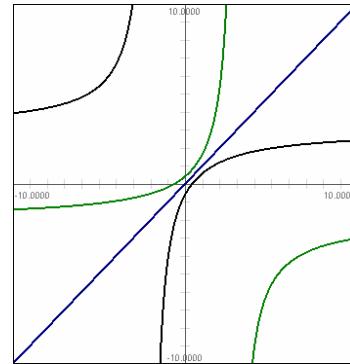
$$4xy - 12x = -8y - 5$$

$$x(4y - 12) = -8y - 5$$

$$x = \frac{-8y - 5}{4y - 12}$$

$$f^{-1} : y = \frac{-8x - 5}{4x - 12}$$

$$D(f^{-1}) = R - \{3\} \quad H(f^{-1}) = R - \{-2\}$$



Pr. Nájdite inverzné funkcie k funkciám  $f$ , určíte  $D(f)$ ,  $H(f)$ ,  $D(f^{-1})$ ,  $H(f^{-1})$  a nakreslite grafy funkcií  $f$ ,  $f^{-1}$ :

- a)  $f: y = 4x - 1$       b)  $f: y = 2x - 3$     c)  $f: y = -2x + 3$       d)  $y = -x - 2$   
e)  $f: y = 1/(x-1)$       f)  $f: y = 2/(x-3)$       g)  $f: y = -2/(x+3)$       h)  $y = -1/(-x + 2)$

Pr. 2.roč. M 4 / str13/9

Ktoré lineárne funkcie sú samy k sebe inverzné?

Tie, ktorých grafy sú kolmé na os  $y=x$ , to znamená tie, ktoré majú smernicu  $k = -1$  a samotná os  $y=x$  teda  $f: y = -x+b$ ,  $f: y = x$ .

Pr. 2.roč. M 4 / str13/10

Ktoré lineárne lomené funkcie sú samy k sebe inverzné? Tie, pre ktoré platí  $D(f) = H(f)$ .

Pr. 2.roč. M 4 / str13/4, 5, 6, 7, 8, 9

Pr. 2.roč. M 4 / str14/13, 14, 15, 16, 17,

Pr. 2.roč. M 4 / str14/ 18

Dokážte, že inverzná funkcia ku klesajúcej funkcií je klesajúca funkcia.

Dôkaz: klesajúca funkcia  $f: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ , nech  $f(x_1) > 0, f(x_2) > 0, / f(x_1).f(x_2)$

klesajúca funkcia  $f^{-1}: x_1 < x_2 \Rightarrow f^{-1}(x_1) > f^{-1}(x_2)$

Dú: Dokážte, že inverzná funkcia k rastúcej funkcií je rastúca funkcia.

Dôkaz: rastúca funkcia  $f: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ , nech  $f(x_1) > 0, f(x_2) > 0, / f(x_1).f(x_2)$

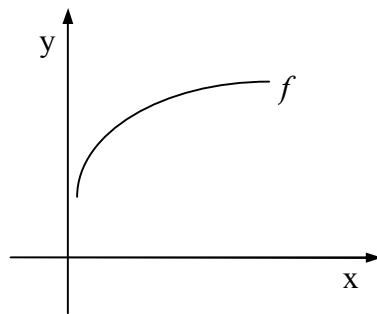
rastúca funkcia  $f^{-1}: x_1 < x_2 \Rightarrow f^{-1}(x_1) < f^{-1}(x_2)$

Pr. Napíšte rôzne kvadratické funkcie. Nech a)  $D(f) = (x_V, \infty)$ , b)  $D(f) = (-\infty, x_V)$ , ( $x_V$  – x-ová súradnica vrchola paraboly). Nakreslite graf kvadratických funkcií a ich inverzných funkcií.

Napr: a)  $f: y = x^2 - x - 6$     b)  $f: y = -x^2 + 5x + 6$

1) Určte inverznú funkciu k funkcií  $y = x^2 - 1 \wedge x \in R^+$ .

2) Načrtnite graf inverznej funkcie k funkcií  $f$ .



3) Určte inverznú funkciu (ak existuje) k funkcií  $f$ , nájdite definičný obor i obor hodnôt danej aj inverznej funkcie: a)  $f : y = 2x + 4 \wedge x \in (-2; 3)$  b)  $f : y = |x|$

4) K danej funkcií  $f$  určíte inverznú funkciu. Načrtnite aj grafy oboch funkcií v tej istej sústave súradníc.

a)  $f : y = 2x - 4 \wedge x \in \langle 0; 6 \rangle$       b)  $f : y = \frac{-3}{x}, x \neq 0$       c)  $f : y = x^2 \wedge x \in \langle 0; \infty \rangle$

d)  $f : y = -3x + 5 \wedge x \in (-1, 2)$

## 1.24. SYSTEMATIZÁCIA VLASTNOSTÍ FUNKCIÍ

1. Napíšte inverzné funkcie  $f^{-1}$  k daným funkciám  $f$ , určíte  $D(f^{-1})$ ,  $H(f^{-1})$  a načrtnite graf inverznej funkcie.

- a)  $f : y = 4x - 2 \quad D(f) = R$
- b)  $f : y = 3 - 5x \quad D(f) = R^+$
- c)  $f : y = -1 - 2x \quad D(f) = (-2 ; 3)$

2. Napíšte inverzné funkcie  $f^{-1}$  k daným funkciám  $f$ , určíte  $D(f^{-1})$ ,  $H(f^{-1})$  a načrtnite graf inverznej funkcie.

- |                        |                                  |                          |                                |
|------------------------|----------------------------------|--------------------------|--------------------------------|
| a) $f : y = x^2$       | $D(f) = (2 ; 4)$                 | d) $f : y = (x-1)^2$     | $D(f) = \langle 1 ; 3 \rangle$ |
| b) $f : y = 2 - x^2$   | $D(f) = (-3 ; -1)$               | e) $f : y = -(x+2)^2$    | $D(f) = (-2,5 ; -0,5)$         |
| c) $f : y = -1 + 2x^2$ | $D(f) = \langle 0,5 ; 3 \rangle$ | f) $f : y = 3 - (x-2)^2$ | $D(f) = \langle 0 ; 3 \rangle$ |

3. Napíšte inverzné funkcie  $f^{-1}$  k daným funkciám  $f$ , určíte  $D(f^{-1})$ ,  $H(f^{-1})$  a načrtnite graf inverznej funkcie.

- |                          |  |                              |  |
|--------------------------|--|------------------------------|--|
| a) $f : y = x^{-1}$      | $D(f) = R$                                   | d) $f : y = -4 + x^{-1}$     | $D(f) = (0 ; 4)$                         |
| b) $f : y = 1 + x^{-1}$  | $D(f) = (-3 ; 0) \cup (0 ; 2)$               | e) $f : y = -1 - (x-1)^{-1}$ | $D(f) = (-3 ; 1)$                        |
| c) $f : y = -2 - x^{-1}$ | $D(f) = \langle -2 ; 0 \rangle \cup (0 ; 2)$ | f) $f : y = -3 + (x+2)^{-1}$ | $D(f) = \langle -3 ; 0 \rangle - \{-2\}$ |

4. Napíšte inverzné funkcie  $f^{-1}$  k daným funkciám  $f$ , určíte  $D(f^{-1})$ ,  $H(f^{-1})$  a načrtnite graf inverznej funkcie.

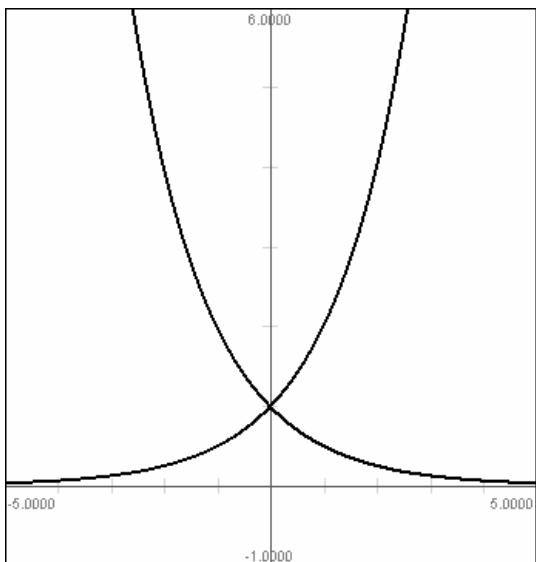
- |                          |                                 |                           |                                 |
|--------------------------|---------------------------------|---------------------------|---------------------------------|
| a) $f : y = x^3$         | $D(f) = R$                      | b) $f : y = 2 - x^3$      | $D(f) = (-3 ; 2)$               |
| c) $f : y = -1 + x^3$    | $D(f) = \langle -2 ; 2 \rangle$ | d) $f : y = -4 + x^3$     | $D(f) = (0 ; 4)$                |
| e) $f : y = 2 - (x-1)^3$ | $D(f) = (-3 ; 1)$               | f) $f : y = -1 + (x+2)^3$ | $D(f) = \langle -3 ; 0 \rangle$ |



## 1.25. EXPONENCIONÁLNA FUNKCIA – ZAVEDENIE POJMU

### 1.26. VLASTNOSTI EXPONENCIONÁLNEJ FUNKCIE

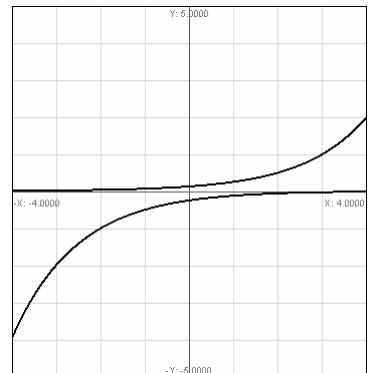
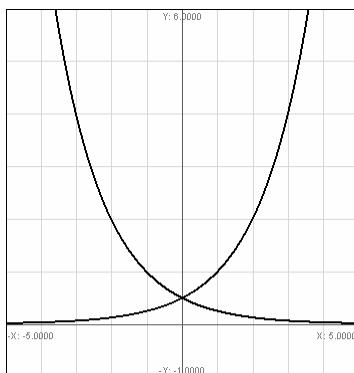
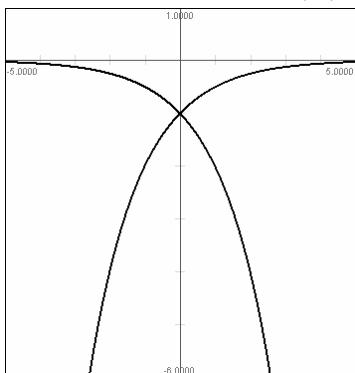
**Def:** Nech  $a$  je ľubovoľné reálne kladné číslo rôzne od 1. Exponenciálnou funkciou nazývame funkciu s predpisom  $f: y = a^x$ , kde  $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ .



**Vlastnosti :**

$a > 1$	$0 < a < 1$
$H = (0, \infty)$	$H = (0, \infty)$
rastúca na $(-\infty, \infty)$	klesajúca na $(-\infty, \infty)$
prostá	prostá
kladná na $(-\infty, \infty)$	kladná na $(-\infty, \infty)$
spojitá	spojitá
ohraničená zdola $d = 0$	ohraničená zdola $d = 0$
nemá max ani min	nemá max ani min

**Vlastnosti :**  $f: y = \left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x} = a^{-x}$



$$f: y = -a^x$$

$$f: y = -a^{-x}$$

$$f: y = a^{x-1}$$

$$f: y = a^{-x+1}$$

$$f: y = a^{x-3}$$

$$f: y = -a^{x+2}$$

1) Určte definičné obory a obory funkčných hodnôt funkcie a nakreslite ich grafy

$$a) y = 2^x$$

$$b) y = 3^x$$

$$c) y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$$

$$d) y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$$

2) Určte definičné obory a obory funkčných hodnôt funkcie

$$a) y = 3^{x^2}$$

$$b) y = \left(\frac{1}{7}\right)^{\sqrt{x^2-1}}$$

$$c) y = \frac{1}{4^{x^2}}$$

$$d) y = \frac{1}{5^{\sqrt{5-x^2}}}$$

3) Dané čísla porovnajte s číslom 1:  $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{4}}; \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{5}{6}}; \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{7}{3}}; (2,36)^0; 0,8^{-\frac{2}{3}}; 3^{25}$ .

4) Doplňte tabuľku hodnôt funkcie  $f(x) = 2^x - 2$ .

$x$	-4			-1		1		3	
$f(x)$		-15/8	-7/4		-1		2		14

5. Nakreslite graf funkcie :

- |                       |                        |                       |                        |
|-----------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|
| a) f: $y = 2^x - 2$   | b) f: $y = 2^{x+1}$    | c) f: $y = 2^{x-1}$   | d) f: $y = 1+2^x$      |
| e) f: $y = 0,5^x$     | f) f: $y = -2^x$       | g) f: $y = -1+2^x$    | h) f: $y = 2^{-x}$     |
| i) f: $y = 0,5^{x-2}$ | j) f: $y = -0,5^{x-2}$ | k) f: $y = -0,5^{-x}$ | l) f: $y = -0,5^{1-x}$ |

6. Ktoré z nasledujúcich mocnín sú väčšie ako 1 :

- a)  $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{3}{4}}, \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{3}{7}}, \left(\frac{41}{40}\right)^{0,2}, \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\sqrt[1,001]}, \left(\frac{\pi+1}{4}\right)^{-2}, \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{4}}, \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{4}{3}}, \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{7}{3}}, \left(\frac{5}{4}\right)^{-\frac{7}{8}}, \left(\frac{2}{5}\right)^{-\frac{7}{6}}, \left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{5}{6}},$   
 b)  $(2,18)^{0,1}, (0,45)^{0,4}, (2,36)^0, 0,8^{-\frac{2}{3}}, 0,57^0, 0,15^{0,2}$

7. Čo platí pre exponenty m, n, ak platí :

- a)  $\left(\frac{3}{4}\right)^m < \left(\frac{3}{4}\right)^n$     b)  $\left(\frac{3}{2}\right)^m < \left(\frac{3}{2}\right)^n$     c)  $\left(\frac{8}{5}\right)^m > \left(\frac{8}{5}\right)^n$   
 d)  $2,5^m < 2,5^n$     e)  $0,7^m > 0,7^n$     f)  $\pi^m > \pi^n$

8. Ktorý zo vzťahov  $0 < a < 1$ ,  $a > 1$  platí, ak :

- a)  $a^{\frac{3}{5}} < a^{\frac{4}{5}}$     b)  $a^{\frac{2}{7}} > a^{\frac{5}{7}}$     c)  $a^{-\frac{7}{8}} < a^{\frac{9}{8}}$     d)  $a^{\frac{3}{5}} < a^{-\frac{4}{5}}$   
 e)  $a^{\frac{3}{5}} < a^{\frac{7}{3}}$     f)  $a^{\frac{21}{6}} < a^{\frac{1}{6}}$     g)  $a^{-\frac{8}{7}} > a^{\frac{9}{7}}$     h)  $a^{\frac{9}{8}} < a^{-\frac{10}{8}}$

**5.1.5 Načrtnúť, na základe poznania grafu funkcie  $y = f(x)$ , grafy funkcií  $y = -f(x)$ ,  $y = f(x) + k$ ,  $y = |f(x)|$ ,  $y = f(x + q)$ ,  $y = f(x + q) + k$**

9. Daná je funkcia : A)  $f(x) : y = 2^x$ , B)  $f(x) : y = -2^x$ , C)  $f(x) : y = -3^x$ , D)  $f(x) : y = -4^{-x}$

Načrtnite jej graf i graf funkcie:

- a)  $y = -f(x)$     b)  $y = f(x) + 3$     c)  $y = |f(x)|$     d)  $y = f(x - 3)$     e)  $y = f(x - 3) + 2$

10. Určte  $m \in \mathbb{R}$ , pre ktoré je  $f : y = \left(\frac{m}{m+2}\right)^x$  rastúca a pre ktoré klesajúca funkcia.

11. Určte  $m \in \mathbb{R}$ , pre ktoré je  $f : y = \left(\frac{2m-1}{3}\right)^x$  rastúca funkcia.

12. Určte  $a \in \mathbb{R}$ , pre ktoré je  $f : y = \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^x$  klesajúca funkcia.

## 1.27. EXPONENCIONÁLNE ROVNICE

## 1.28. ZÁKLAZNÉ EXPONENCIONÁLNE ROVNICE

1) Určte počet riešení rovnice v množine  $R$ :

a)  $2^x = -0,5$       b)  $2^x = \sqrt{3}$       c)  $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 2$       d)  $\left(\frac{1}{3}\right)^x = -0,2$

2) Riešte rovnice v množine  $R$ :

a)  $2^x = 16$       b)  $3^x = \sqrt{27}$       c)  $5^x = \frac{1}{25}$       d)  $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 81$   
 e)  $0,5^x = \sqrt[3]{4}$       f)  $5^{-x} = 0,008$       g)  $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{9}{4}$       h)  $2^x = -4$

3) Riešte nerovnice v množine  $R$ :

a)  $2^x > 8$       b)  $3^x < \sqrt{3}$       c)  $0,5^x > 4$       d)  $\left(\frac{1}{3}\right)^x < 3$       e)  $5^x > 0$       f)  $0,2^x < -1$

4. Riešte rovnice :

a) $2^x = 16$	d) $5^x = 125$	g) $3^x = 1/81$	j) $5^{-x} = 0,008$
b) $2^x = 4$	e) $5^x = 625$	h) $3^x = 81^{-2}$	k) $81^{-x} = 27$
c) $2^x = 64$	f) $5^x = 1/25$	i) $3^x = \sqrt{27}$	l) $5^{-x} = 25$
m) $2^x = -4$	n) $10^x = 0,001$	o) $0,01^x = \sqrt[3]{10}$	p) $\sqrt{100^x} = 10^{-1}$

5. Riešte rovnice :

a) $3^{x-1} = 1$	b) $4^{x+1} = 1$	c) $3^{5-x} = 3^{4+x}$
d) $2^{2x-1} = 8$	e) $10^{x^2-x-6} = 1$	f) $4^{(x+3)(2-5x)} = 1$
g) $2^x \cdot 3^x = 216$	h) $7^{1-x} \cdot 4^{1-x} = 1/28$	i) $3^{0,5(x-5)} = 3\sqrt{3}$
j) $2^x \cdot 5^x = 0,1 \cdot 10^{2x-3}$	k) $0,7^{4x+5} = 1$	l) $3^{x,x-x-6} = 1$
m) $8^{5x-3} \cdot 8^{-2x+1} = 8^{3x+2} \cdot 8^{-4x+4}$		

6. Riešte rovnice :

a) $9^{\sqrt{x+2}} = 27 \cdot 3^{\sqrt{x+2}}$	b) $\frac{3^{x^2}}{3^{3x-6}} = 9^{2x-3}$	c) $\frac{5^{x^2}}{25^{x+5}} = 25^3 \cdot 5^{4x}$
d) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{9}{4}\right)^1$	e) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 81$	f) $\left(\frac{4}{9}\right)^{x+2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{3-x}$
g) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2} = 25^x$	h) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{x}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{4}{3}\right)^x}$	i) $\left(\frac{3}{5}\right)^{2x-5} = \left(\frac{5}{3}\right)^3$
j) $3^{v^2-5v+6} = 1$	k) $(\sqrt{3})^x \cdot (\sqrt{12})^x = \frac{1}{6}$	l) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$

7. Riešte exponenciálne rovnice:

a) $5^{x-1} = 10^x \cdot 2^{-x} \cdot 5^{x+1}$	e) $2^x \cdot 3^x = 216$	{3}
b) $(10^{6-x})^{5-x} = 100$	f) $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} = 40/3$	{-1}
c) $6^x - 4 \cdot 3^x = 3 \cdot 2^x - 12$	g) $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} = 448$	{9}
d) $3^{5x-4} + 3^{5x} = 82$	h) $2^{x+1} \cdot 5^x = 200$	{2}

8) Riešte v  $R$  nerovnice: a)  $2^x > 8$       b)  $3^x < \sqrt{3}$       c)  $0,5^x > 4$

d)  $\left(\frac{1}{3}\right)^x < 3$       e)  $5^x > 0$       f)  $0,2^x < -1$

## 1.29. ZLOŽITEJŠIE EXPONENCIONÁLNE ROVNICE

**1. Riešte zložitejšie exponenciálne rovnice – použite substitučnú metódu:**

- |  |         |  |       |
|--|---------|--|-------|
| a) $3^{x+2} + 9^{x+1} = 810$                     | {2}     | e) $\sqrt[x]{81} + \frac{27}{\sqrt[x]{81}} = 12$                 | {2,4} |
| b) $3^{x+4} - 3^3 = 3 - 3^{-x}$                  | {-3,-1} | f) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4^{3-5x}} = 4 \cdot \sqrt{2^{5-7x}}$ | {12}  |
| c) $16^{x+1} \cdot 3^3 \cdot 4^x = 10$           | {1/2}   | g) $2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x + 2 = 0$                           |       |
| d) $4^{\sqrt{5x+1}-2} = 4 \cdot 2^{\sqrt{5x+1}}$ | {7}     | h) $4^{2/x} - 5 \cdot 4^{1/x} + 4 = 0$                           |       |

**2. Riešte rovnice (použite substitučnú metódu) :**

- |                                     |                                       |  |
|-------------------------------------|---------------------------------------|--|
| a) $2^{x+2} - 2^x = 96$             | b) $3^{x-3} = 108 - 3^{x-2}$          | c) $4^x + 2^{x+1} = 80$                |
| d) $3^{x-3} = 108 - 3^{x-2}$        | e) $4^{x-3} + 4^{x-2} + 4^{x-1} = 42$ | f) $5^{x+1} - 15 \cdot 5^{x-1} = 1250$ |
| g) $2^{4x} - 50 \cdot 2^{2x} = 896$ | h) $3^{x+2} + 9^{x+1} = 810$          | i) $9^{x+1} + 8 \cdot 3^x - 1 = 0$     |

**3. Riešte rovnice (použite substitučnú metódu) :**

- a)  $10 \cdot 2^x - 2^{2x} - 16 = 0$  {1,3} b)  $65 \cdot 4^{x-1} - 1 = 4^{2x+1}$  {1,-2} c)  $\frac{9}{4} \cdot 4^{2x} - \frac{1}{2} \cdot 4^{4x} = 1$  {1/2,-1/4}

**4. Riešte rovnice :**

- |   |         |   |          |
|---|---------|---|----------|
| a) $\sqrt[3]{2^{2x-3}} = \sqrt[7]{0,5^{3-x}}$ | {12/11} | b) $3^{x+2} - 3^{x-1} = 702$                  | {4}      |
| c) $0,25^{2-x} = \frac{256}{2^{x+3}}$         | {3}     | d) $4 \cdot 3^{x+1} - 72 = 3^{x+2} + 3^{x-1}$ | {3}      |
| e) $\sqrt[x+2]{27} = \sqrt[x+1]{9}$           | {1}     | f) $3^{\frac{x^2-11}{2}x+3} = \sqrt{3}$       | {1/2, 5} |

**1** Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

a)  $2^{3x-1} \cdot 4 = 8^{x+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$

e)  $2 \cdot 0,5^{x^2+\frac{8}{3}x} = \sqrt[3]{4}$

b)  $\sqrt[4]{4^x} \cdot \sqrt[3]{2^{x-3}} = \sqrt[6]{16}$

f)  $5^x \cdot 2^x = 100^{x-1}$

c)  $\frac{1}{3^x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt[6]{27^{3-3x}} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{x+3}$

g)  $\frac{81}{16} = \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^{x+1}$

d)  $0,25 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{2x} = 1$

h)  $\frac{3^x}{2 \cdot 3\sqrt{3}} = 4,5$

**2** Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

a)  $3^x + 3^{x+1} = 108$

d)  $\frac{4}{5} \cdot 5^0 + 5^{-1} - 25^x + 20 \cdot 25^{x-1} = 0$

b)  $2^{x+1} + 2^{x-1} + 2^{x+3} = \frac{21}{8}$

e)  $3^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 3^{x+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = \frac{5}{3}$

c)  $7 \cdot 4^{-x+2} = 3 \cdot 4^{-x+3} - 5$

f)  $2^{2x} \cdot 5^x - 2^{2x-1} \cdot 5^{x+1} = -600$

**3** Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

a)  $4^{2x} - 6 \cdot 4^x + 8 = 0$

d)  $9^{x-0,5} + 9^{0,5-x} = \frac{10}{3}$

b)  $\frac{1}{4} \cdot 2^x + \frac{1}{2} \cdot 4^x = 9$

e)  $2\left(\frac{1}{4}\right)^x - 3\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^x\right]\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$

c)  $9 \cdot 3^x + 3^{-x} = 10$

f)  $5^{2x} \cdot (5^{2x} - 5) = 3 \cdot (5^{2x+1} + 5^{2x}) + 50$

**4** Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

a)  $3^x + 3^{x+1} = 7 \cdot 4^x - 4^{x+1}$

c)  $2 \cdot 4^x + 5^{x-\frac{1}{2}} = 5^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

b)  $2^{x-1} - 2^{x-2} = 5^{x-3} + 2^{x-3}$

d)  $3^x + \frac{9^x}{3} = 3^{x+1} + \frac{9^x}{9}$

**5** Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

a)  $4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x$

b)  $16^x = 8 \cdot 4^x + 2 \cdot 8^x$

**6** Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

a)  $3^x = 10$

c)  $2^x \cdot 3^{x-1} = 6$

b)  $5^{x+1} = 4$

d)  $5^x \cdot 7^{2x} = 16^{x-1}$

Výsledky :

1. a){2}      b){2}      c){-2}      d){-0,5}      e){-2, -2/3}      f) {2}      g){2}      h){2+√3}
2. a){3}      b){-2}      c){2}      d){0,5}      e){-1}      f) {2}
3. a){0,5, 1}      b){2}      c){-2, 0}      d){0, 1}      e){-2}      f) {1}
4. a){1}      b){3}      c){3/2}      d){2}
5. a){0}      b){2}
6. a){2,1}      b){-0,14}      c){1,61}      d){-1,02}

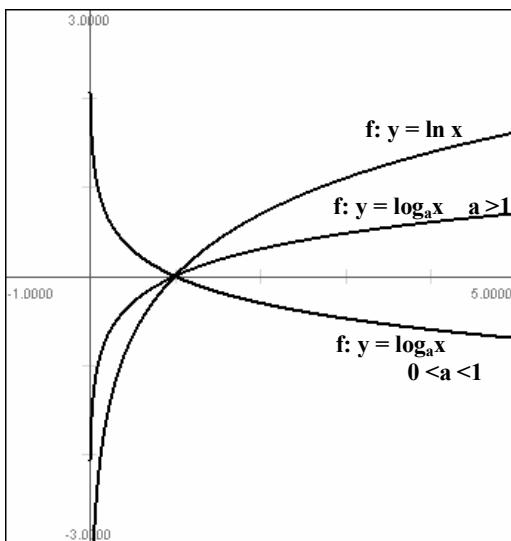
## 1.30. LOGARITMIACKÁ FUNKCIA – ZAVEDENIE POJMU

### 1.31. VLASTNOSTI LOGARITMICKEJ FUNKCIE

**Def:** Nech  $a$  je ľubovoľné reálne kladné číslo rôzne od 1. Logaritmickou funkciou nazývame funkciu s predpisom  $f: y = \log_a x$  pričom platí  $x = a^y$ .

Ak  $a = 10$        $\log_a x$       sa nazýva dekadický logaritmus  
 Ak  $a = e = 2,718282$        $\log_a x = \ln x$  sa nazýva prirodzený logaritmus

Vlastnosti :  $\log_a 1 = 0$



$a > 1$	$0 < a < 1$
$R = (0, \infty)$ , $H = R$	$R = (0, \infty)$ , $H = R$
rastúca na $(0, \infty)$	klesajúca na $(0, \infty)$
prostá	Prostá
kladná na $(1, \infty)$ záporná na $(0, 1)$	kladná na $(0, 1)$ záporná na $(1, \infty)$
spojitá	spojitá
prostá	prostá
neohraničená	neohraničená
nemá max ani min	nemá max ani min
Inverzná k exponenciálnej funkcií	

#### VETY O LOGARITMOCH

1.  $\log_a(r \cdot s) = \log_a r + \log_a s$
2.  $\log_a(r : s) = \log_a r - \log_a s$
3.  $\log_a r^s = s \cdot \log_a r$
4.  $\log_{10} x = \ln x / \ln 10$
5.  $\ln x = \log x / \log e \quad e = 2,7182818284$
6.  $a^{\log_a x} = x$

1) Dané sú funkcie  $f_1(x) = 3^x$  a  $f_2(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ .

- a) Určte ich funkčné hodnoty pre  $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ .
- b) Načrtnite ich grafy a opíšte vlastnosti.
- c) Načrtnite grafy funkcií, ktoré sú k daným funkciám inverzné (ak existujú).
- d) Určte predpis inverzných funkcií a opíšte ich vlastnosti.

2) Zistite definičné obory funkcií:

- a)  $f_1(x) = \log_a(x+3)$
- b)  $f_2(x) = \log_{0,5}(-x)$
- c)  $f_3(x) = \log_5 \sqrt{x-4}$
- d)  $f_4(x) = \sqrt{\log_3 x}$

## 1.32. LOGARITMUS ( DEKADICKÝ , PRIRODZENÝ)

**Tabuľka hodnôt dekadických logaritmov :**

log 1	log 2	log 3	log 4	log 5	log 6	log 7	log 8	log 9	log 10
0	0,301	0,477	0,602	0,699	0,778	0,845	0,903	0,954	1

1. Pomocou znakov nerovností porovnajte logaritmy :

- a)  $\log_3 5 \quad \log_3 8$       b)  $\log_4 5 \quad \log_6 8$       c)  $\log_7 5 \quad \log_3 8$       d)  $\log_5 9 \quad \log_3 8$   
 e)  $\log_2 5 \quad \log_3 5$       f)  $\log_7 9 \quad \log_6 8$       g)  $\log 5 \quad \log_3 8$       h)  $\log 9 \quad \log 8$

2. Pomocou znakov nerovností porovnajte logaritmy :

- a)  $\log_{0,2} 5 \quad \log_3 8$       b)  $\log_{0,1} 5 \quad \log_{0,2} 8$       c)  $\log_{0,7} 5 \quad \log_{0,3} 8$       d)  $\log_{0,5} 9 \quad \log_{0,1} 8$   
 e)  $\log_{0,2} 5 \quad \log_2 5$       f)  $\log_{0,4} 1 \quad \log_6 1$       g)  $\log_{0,5} 1 \quad \log_{0,3} 1$       h)  $\log 10 \quad \log_{0,1} 10$

3. Ktoré z uvedených čísel sú kladné :

- a)  $\log_{0,2} 5$       b)  $\log_{0,1} 0,5$       c)  $\log_7 5$       d)  $\log_{0,5} 9$       e)  $-\log_{0,2} 5$       f)  $\log_{0,4} 1$   
 g)  $\log_7 8$       h)  $\log 15$       i)  $-\log 0,5$       j)  $\log_{0,5} 0,6$       k)  $-\log_{0,2} 0,8$       l)  $-\log_{0,4} 12$

4. Nájdite všetky x, pre ktoré platí :

- a)  $\log_3 x > \log_3 8$       b)  $\log_{0,1} 5 > \log_{0,1} x$       c)  $\log_{0,7} 5 < \log_{0,7} x$       d)  $\log_{0,5} 9 \geq \log_{0,5} x$   
 e)  $\log_x 5 > \log_x 2$       f)  $\log_x 0,1 \geq \log_x 10$       g)  $\log_x 0,2 < \log_x 0,9$       h)  $\log_x 10 > \log_x 3$

5. Určte definičné obory funkcií :

- a)  $y = \log_3(x-2)$       b)  $y = \log_{0,2}(6-x)$       c)  $y = \log(0,2x-2)$       d)  $y = \log_7(-x-2)$   
 e)  $y = \log_{0,1}(-x+5)$       f)  $y = \log_{3\sqrt{x-3}}$       g)  $y = \sqrt{\log(x+3)}$       a)  $y = \log_3(x-\sqrt{2})$

6. Vypočítajte :

- a)  $\log_3 9$       b)  $\log_4 16$       c)  $\log_7 7$       d)  $\log_2 8$       e)  $\log_{10} 100$       f)  $\log_3 27$   
 g)  $\log 1$       h)  $\log 100$       i)  $\log_8 512$       j)  $\log_4 64$       k)  $\log_7 1$       l)  $\log_2 1024$

7. Vypočítajte :

- a)  $\log 0,01$       b)  $\log_2 0,5$       c)  $\log_2 0,25$       d)  $\log_3 0,333$       e)  $\log_1 1$       f)  $\log_3 0,111$   
 g)  $\log_4 0,25$       h)  $\log_5 0,2$       i)  $\log_5 0,25$       j)  $\log_{0,2} 0,04$       k)  $\log_{0,1} 0,001$       l)  $\log_{0,2} 5$

### 1.33. VETY O LOGARITMOCH, VÝRAZY S LOGARITMAMI

8. Určte logaritmy čísel pomocou vlastností logaritmov :

VZOR :  $\log 200 = \log(2 \cdot 10^2) = \log 2 + \log 10^2 = \log 2 + 2 \cdot \log 10 = 0,301 + 2,1 = 2,301$

- a)  $\log 70$     b)  $\log 500$     c)  $\log 25$     d)  $\log 81$     e)  $\log 1400$     f)  $\log 324$   
 g)  $\log 0,25$     h)  $\log 0,333$     i)  $\log 0,111$     j)  $\log 0,2$     k)  $\log 0,001$     l)  $\log 0,04$   
 m)  $\log \sqrt[7]{7}$     n)  $\log \sqrt[3]{5}$     o)  $\log \sqrt[3]{25}$     p)  $\log \sqrt[4]{81}$     r)  $\log \sqrt{14}$     s)  $\log \sqrt[3]{32}$

9. Určte logaritmy čísel :

- a)  $\log_7 49$     b)  $\log_2 \frac{1}{4}$     c)  $\log_{10} 0,1$     d)  $\log_{\frac{1}{2}} 4$     e)  $\log_{10} 0,01$     f)  $\log_2 \sqrt{2}$   
 g)  $\log_{10} \sqrt{10}$     h)  $\log_{10} \sqrt[5]{10000}$

9. Logaritmujte výraz :

- a)  $x = a:b:c$     b)  $x = (a \cdot b \cdot c)^2$     c)  $x = (a \cdot b / c \cdot d)^3$     d)  $x = 2 \cdot 0,7 / (3 \cdot a)^2$   
 e)  $x = a \cdot b \cdot \sqrt{c}$     f)  $x = \sqrt{(a \cdot b \cdot c)^3}$     g)  $x = (a^2 \cdot b / c^4 \cdot d)^3$     h)  $x = 2 \cdot 0,7 / (3 \cdot 0,14)$

10. Odlogaritmujte :

- a)  $\log_z x = \log_z a - \log_z b + 2 \cdot \log_z c$     b)  $\log_z x = 2 \cdot (\log_z a + 1/3 \cdot \log_z b - 1)$   
 c)  $\log_z x = 2 \cdot \log_z a - 3 \cdot \log_z b + 1/2 \cdot \log_z c$     d)  $\log_z x = -1 \cdot \log_z a + 3 \cdot \log_z b - 1/2 \cdot \log_z c$

11. Určte  $x$ , ak : a)  $\log_z x = 1/4 \cdot \log_z a - \log_z \log_z b$     b)  $\log_z x = y \cdot (\log_z a + \log_z \log_b)$

12. Určte hodnotu výrazu  $x$ :

a)  $x = \log_3 243 + \log_4 \frac{1}{256} + \log_{0,2} 0,04$     b)  $x = \log_5 625 + \log_2 64^3 + \log_3 \frac{1}{9}$

13. Určte  $x$ , ak

- a)  $\log_z x = \log_z a + \log_z b + \log_z c$     d)  $\log_z x = a \cdot \log_z b + b \cdot \log_z a - \log_z b - \log_z a$   
 b)  $\log_z x = \log_z a + \log_z b - \log_z c$     e)  $\log_z x = 3 \cdot \log_z a + (n+3) \log_z b - 3$   
 c)  $\log_z x = 3 \cdot \log_z a + 2 \cdot \log_z b + 1$

14. Určte  $\log_z x$ , ak

a)  $x = \frac{a^2 \cdot \sqrt{tg \alpha}}{b^3 \cdot \sqrt[3]{c}}$     c)  $x = \sqrt{\frac{a}{\sqrt{a}}}$     e)  $x = \sqrt[n+1]{a^n \cdot \sqrt[m]{b^{-1}}}$   
 b)  $x = a^{-2} \cdot b^{-3}$     d)  $x = (\sqrt{a})^{\sqrt{a}}$     f)  $x = 3 \cdot m^{-1} \cdot n^{-2} \cdot p$

15. Určte hodnotu výrazu  $x$ :

a)  $x = (\log_{10} 0,1 + \log_{10} (\sqrt{10})^3) \cdot \log_{10} 100$     b)  $x = 2 \cdot \log_3 \sqrt{27} - \log_3 1 + \log_3 \frac{1}{27} - \log_3 3$

## 1.34. LOGARITMICKÉ ROVNICE

1. Najdite číslo  $x$ , ak platí:

- a)  $\log_2 x = 4$       b)  $\log_{10} x = -1$       c)  $\log_{\frac{1}{3}} x = -2$       d)  $\log_{\sqrt{2}} x = 4$   
e)  $\log_5 x = 0$       f)  $\log_6 x = 1$       g)  $\log_{\frac{1}{2}} x = -1$       h)  $\log_{0,1} x = 1$

2. Určte, pre ktorý základ  $z$  platí:

- a)  $\log_z 216 = 3$       b)  $\log_z \frac{1}{27} = 3$       c)  $\log_z \frac{1}{64} = -3$       d)  $\log_z \sqrt{8} = \frac{3}{4}$   
e)  $\log_z 10 = 6$       f)  $\log_z 3 = 3$       g)  $\log_z \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$       h)  $\log_z n = n$

3. Určte  $x$ , ak platí:      a)  $\log_2 x = 3$       b)  $\log_8 x = \frac{2}{3}$       c)  $\log x = -2$       d)  $\log_4 x = -\frac{2}{3}$

4. Určte  $x$ , ak platí:      a)  $\log_x 16 = 2$       b)  $\log_x \frac{1}{27} = -3$       c)  $\log_x \frac{1}{3} = \frac{3}{2}$       d)  $\log_x \frac{1}{4} = -\frac{2}{3}$

5. Určte  $x$ , ak platí:      a)  $\log_2 8 = x$       b)  $\log_3 \frac{1}{27} = x$       c)  $\log_5 \sqrt{125} = x$   
d)  $\log_8 \frac{1}{4} = x$       e)  $\log 10^6 = x$       f)  $\log \sqrt[3]{100} = x$

## 1.35. ZÁKLADNÉ LOGARITMICKÉ ROVNICE

1. Vypočítajte :

- |                    |                   |                       |                        |                        |
|--------------------|-------------------|-----------------------|------------------------|------------------------|
| a) $\log_3 x = 2$  | b) $\log_4 x = 3$ | c) $\log_7 x = 7^2$   | d) $\log_2 x = 3$      | e) $\log_{10} x = 3$   |
| f) $\log_3 x = -3$ | g) $\log x = 0$   | h) $\log x = -2$      | i) $\log_8 x = -2$     | j) $\log_4 x = -1$     |
| k) $\log_7 x = -1$ | l) $\log_2 x = 8$ | m) $\log_{0,2} x = 2$ | n) $\log_{0,5} x = -2$ | o) $\log_{0,4} x = -1$ |

2. Vypočítajte :

- |   |   |
|---|---|
| a) $\log_2 8 + \log_2 14 - \log_2 7 =$                    | b) $2 \cdot \log_{10} + \log 8 - 3 \cdot \log 2 =$                  |
| c) $\log_2 8 + \log_2 14 - \log_2 7 =$                    | d) $2 \cdot \log_{10} + \log 8 - 3 \cdot \log 2 =$                  |
| e) $\log_5 125 + \log_5 10 - \log_5 2 =$                  | f) $2 \cdot \log_{10} + (\log 8 - 3 \cdot \log 2) =$                |
| g) $\log_3 2 + \log_3 4 - \log_3 8 =$                     | h) $\log_{10} - (\log 16 - 3 \cdot \log 2) =$                       |
| i) $2 \cdot \log 4 - (2 \cdot \log 3 - 3 \cdot \log 2) =$ | j) $\frac{1}{2} \cdot \log 8 + 2 \cdot (\log 8 - 2 \cdot \log 2) =$ |

3. Riešte rovnice :

- |                                   |  |
|-----------------------------------|--|
| a) $\log x = 2 - \log 5$          | b) $\frac{1}{2} \cdot \log x = 2 \cdot \log 2$ |
| c) $\log_3 (x+5) = \log_3 (2x-1)$ | d) $\log 2 + \frac{1}{2} \cdot \log(x+2) = 1$  |

4. Riešte rovnice podľa vzoru :

$$\text{VZOR : } \log(x-13) - \log(x-3) = 1 - \log 2$$

$$D : x-13 > 0 \text{ a } x-3 > 0$$

$$x > 13 \text{ a } x > 3 \quad / \quad (\text{súčasne}) \quad x > 13$$

$$\log(x-3/x-13) = \log 10 - \log 2$$

$$\log(x-13/x-3) = \log 10/2$$

$$(x-13/x-3) = 5$$

$$x-13 = 5(x-3)$$

$$x-13 = 5x-15$$

$$x = 0,5 \quad \text{nepatrí do } D(f) - \text{úloha nemá riešenie}$$

- |   |  |
|---|--|
| a) $\log(x+11) - \log(2x-3) = 0,47712$                      | b) $2 \cdot \log(x-1) = 0,5 \cdot (\log x^5 - \log x)$ |
| c) $\log_5(x^2-17) = \log_5(x+3)$                           | d) $\log(x-2) + \log(8x+4) = 3$                        |
| e) $\log_2(x+14) + \log_2(x+2) = 6$                         | f) $\log_5 x + (\log_5 x)^{-1} = 2$                    |
| g) $1 + \log x^3 = 20 / \log x^2$                           | h) $\log_5 x + (\log_5 x)^{-1} = 2$                    |
| i) $2 \cdot \log(x-1) = 0,5 \cdot \log x^5 - \log \sqrt{x}$ | j) $3 \cdot \log x + \log x^4 - \log x = 5$            |
| k) $\log(1+x/1-x) = 2$                                      | l) $\log(x-3) + \log(x+3) = 2 \cdot \log(3-x)$         |
| m) $2 + \log x = 3 \cdot (2 - \log x)$                      | n) $\log(x+1) + \log(x-1) - \log(x-2) = \log 8$        |
| o) $\log(x+3) + \log(x-3) = \log(x-9)$                      | p) $\log(x+3) + \log(x-3) = \log(x+9)$                 |
| r) $\log(7x+6) = 1 + \log(3x-4)$                            | s) $2 \cdot \log(x-2) = \log(14-x)$                    |

6. Riešte rovnice :

- |                                      |  |
|--------------------------------------|--|
| a) $\log(4,5-x) = \log 4,5 - \log x$ | b) $0,5 \cdot \log x = 2 \cdot \log 2$ |
| c) $\log(2x+10) = 2 \cdot \log(x+1)$ | d) $2 \cdot \log(x-2) = \log(14-x)$    |

7. Riešte rovnice :

- |                        |                         |   |
|------------------------|-------------------------|---|
| a) $5^{x-2} = 10/3$    | b) $3^{2x-1} = 5^{3-x}$ | c) $3^{x+1} = 81$                           |
| d) $25^x = 1/5^{2x-3}$ | e) $3^{2x} - 3^x = 6$   | f) $3^{2x-1} + 3^{2x-2} - 3^{2x-4} = 315^x$ |

8. Riešte rovnicu :  $\left(\frac{1}{3}\right)^{2-3x} = 5^x$

Riešenie:  $3^{3x-2} = 5^x$

$$\log(3^{3x-2}) = \log(5^x)$$

$$(3x-2)\log 3 = x\log 5$$

$$3x\log 3 - 2\log 3 = x\log 5$$

$$x(3\log 3 - \log 5) = 2\log 3$$

$$x = \log 9 / (3\log 3 - \log 5)$$

$$x = 0,95424 / (3 \cdot 0,477 - 0,699) = 1,3023$$

## 1.36. ZLOŽITEJŠIE LOGARITMICKÉ ROVNICE

**4.6.2 Aplikovať vlastnosti exponenciálnych a logaritmických funkcií (prostosť a monotónosť) pri riešení exponenciálnych a logaritmických rovníc**

1) Riešte v  $R$ :

a)  $2^{x+2} - 2^x = 96$

b)  $3^{x-3} = 108 - 3^{x-2}$

c)  $4^{x-1} + 4^{x-2} + 4^{x-3} = 42$

d)  $5^{x+1} - 15 \cdot 5^{x-1} = 1250$

e)  $3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$

f)  $4^x - 6 \cdot 2^x = 160$

g)  $4^x + 2^{x+1} = 80$

h)  $9^{x+1} + 8 \cdot 3^x - 1 = 0$

2) Riešte v  $R$ :

a)  $\log_3(x+5) = \log_3(2x-1)$

b)  $\log_5(x^2 - 17) = \log_5(x+3)$

c)  $\log(x+3) + \log(x-3) = 2 \cdot \log(x+1)$

d)  $\log_2(4x-4) - \log_2(3-x) = 2$

e)  $\log(2x+9) - 2 \cdot \log x + \log(x-1) = 2 - \log 50$

f)  $\log_2 \sqrt{x-1} + \log_2 \sqrt{x+2} = 1$

3) Riešte v  $R$ :

a)  $(\log_3 x)^2 - 3 \cdot \log_3 x - 10 = 0$

b)  $2 \cdot \log x = 3 + \frac{2}{\log x}$

c)  $1 + \log x^3 = \frac{10}{\log x}$

4) Riešte v  $R$  rovnicu:  $\log(2x-6) = 2 \cdot \log x - \log(x-4)$

**4.6.3. Vysvetliť riešenie exponenciálnej rovnice pomocou jej logaritmovania**

1) Riešte rovnice s neznámou  $x \in R$ :

a)  $5^x = 3$

b)  $8^{x+1} = 0,1$

c)  $2^{-2x+7} = 10^{-3x+5}$

d)  $4^{x+2} = 5^{x+1}$

2) Riešte rovnice s neznámou  $u \in R$ :

a)  $u^u = u$

b)  $u^{\log u + 2} = 1000$

c)  $u^{\log_2 u + 2} = 8$

d)  $u = 10^{1-0,25 \cdot \log u}$

e)  $5^{2x} - 7^x - 35 \cdot 5^{2x} + 35 \cdot 7^x = 0 \quad \{0\}$

f)  $\left(\frac{1}{3}\right)^{2-3x} = 5^x \quad \{\log 9 / \log 5,4 = 1,3023\}$

g)  $x^{\log x} = 1000 \cdot x^2 \quad \{1000, 0,1\}$

3) Vzorec  $m = m_0 \cdot (0,5)^{\frac{t}{T}}$  vyjadruje závislosť hmotnosti  $m$  rádioaktívnej látky pri jej rádioaktívnej premene od času  $t$ . Počiatočná hmotnosť látky je  $m_0$ , polčas rozpadu (t.j. čas, za ktorý sa hmotnosť zmenší na polovicu pôvodnej hodnoty) je  $T$ . Aká stará je drevená soška, ak obsahuje 68% pôvodného množstva rádioaktívneho uhlíka  $^{14}_6C$ , ktorého polčas rozpadu je 5570 rokov?

4) K danej funkcií určíte funkciu inverznú. Určte aj vlastnosti danej a k tej inverznej funkcie:

a)  $f_1(x) = 4^x \quad$  b)  $f_2(x) = \log_5 x \quad$  c)  $f_3(x) = \log_{\frac{1}{2}} x \quad$  d)  $f_4(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

**9** Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- |                                   |  |
|-----------------------------------|--|
| a) $\log_2(x+1) = 3$              | e) $\log_2 \log_3 \log_{\frac{1}{2}} x = 0$                |
| b) $4 \log_3(2x-1) = 12$          | f) $\log_{\frac{1}{2}} \log_3(1 + 20 \log_2 x) = -2$       |
| c) $\log_{\frac{1}{2}}(2-x) = -2$ | g) $\log_2[14 + 2 \log_7(1 + 2 \log_{\frac{1}{2}} x)] = 4$ |
| d) $\log_4(5x-4) = 2$             | h) $\log_9\{3 \log_2[1 + \log_3(1 - 2 \log_3 x)]\} = 0,5$  |

**10** Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- |                                     |   |
|-------------------------------------|---|
| a) $\log_5(x^2 + 2x) = \log_5(-3x)$ | c) $\log_{0,1}(x^2 - 5x) = \log_{0,1}(5x + 11)$ |
| b) $\log x^2 = \log(4 - x^2)$       | d) $\log_2(x^2 - x) = \log_2 x$                 |

**11** Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- |  |  |
|--|--|
| a) $\log x = 2 \log 5 + \log 4$  |  |
| b) $\frac{\log_3 x}{1 + \log_3 2} = 2$   |  |
| c) $\log_6(x+1) + \log_6 x = 1$  |  |
| d) $\log_2(x+7) - \log_2 x = 3$  |  |
| e) $\log(x+3) = \log x + \log 3$   |  |
| f) $\log_8 \sqrt{x+30} + \log_8 \sqrt{x} = 1$  |  |
| g) $\log x^5 - \log x^4 + \log x^3 = 12$   |  |
| h) $\log \sqrt{x} + \log \frac{1}{x^2} - \log x^3 + \frac{11}{2} = \frac{\log x^2}{1 + \log 10}$ |  |
| i) $3 \log 2x^2 + 2 \log 3x^3 = 5 \log x + 2 \log 6x^3$  |  |
| j) $0,5(3 \log 5 - 1 - \log x) = 2 - \log 5$   |  |
| k) $\log_4(3x+2) - 2 \log_4 x = 2 - \log_4 8$  |  |
| l) $1 + \log_3(5-x) - \log_3(2x-1) = \log_3(2x-1)$   |  |

**12** Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- |                                  |  |
|----------------------------------|--|
| a) $\log_2 \frac{3-x}{x+3} = -2$ | c) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{x+14} = \frac{\log 125}{\log 5}$ |
| b) $\log_3 \frac{6x-2}{x-3} = 2$ | d) $\log_7 \frac{x^2+1}{x^2-1} = 1$                              |

**13** Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

- |   |   |
|---|---|
| a) $\frac{\log_3(6x-2)}{\log_3(x-3)} = 2$                     | c) $\frac{2 \log 3x}{\log(2-7x)} = 1$                 |
| b) $\frac{\log_5(x-\frac{1}{4})}{\log_5(x+\frac{5}{2})} = -1$ | d) $\frac{\log x}{\log(x-2)} = \frac{\log 9}{\log 3}$ |

**14** Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ :

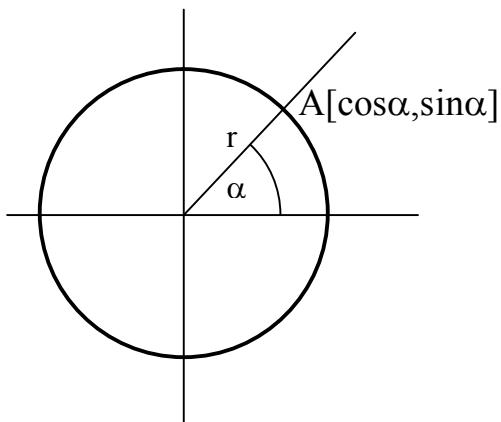
- |   |  |
|---|--|
| a) $\log_2^2 x + 2 \log_2 x - 3 = 0$                                      |  |
| b) $4 \log_9 x (\log_9 x - 1) = 2 + 3 \log_9 x$                           |  |
| c) $\log_{\frac{1}{2}}^2(x+1) + 5 \log_{\frac{1}{2}}(x+1) = 6$            |  |
| d) $4 \log_3(2x+1) + \log_3 \sqrt{2x+1} = \frac{3}{2} \log_3^2(2x+1) - 6$ |  |

**Výsledky :**

- |   |
|---|
| 9. a){7}      b){14}      c){-2}      d){4}      e){1/8}      f){16}      g){1/8}      h){1/3}  |
| 10. a){-5}      b){ $\pm\sqrt{2}$ }      c){-1, 11}      d){2}                                  |
| 11. a){100}      b){36}      c){2}      d){1}      e){3/2}      f){2}      g){1000}      h){10} |
| i){1/2}      j){1/32}      k){2}      l){2}   |
| 12. a){9/5}      b){25/3}      c){2}      d){ $\pm 2\sqrt{3}/3$ }                               |
| 13. a){11}      b){1/2}      c){2/9}      d){4}   |
| 14. a){2, 1/8}      b){81, $\sqrt{3}/3$ }      c){-1/2, 63}      d){-1/3, 40}                   |

# GONIOMETRICKÉ FUNKCIE

## 1.43. STUPŇOVÁ A OBLÚKOVÁ MIERA



-uhol v stupňovej miere určujeme v stupňoch a vyjadruje časť roviny ohraničenej ramenami uhla

-uhol v oblúkovej miere určujeme v radiánoch a vyjadruje dĺžku kružnicového oblúka medzi ramenami uhla

$$\begin{aligned} \text{Platí : } \pi &= 3,14 & \pi &= 22/7 \\ 2\pi &= 6,28 \end{aligned}$$

Miera :

stupňová	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$135^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$	$210^\circ$	$225^\circ$	$240^\circ$	$270^\circ$	$300^\circ$	$315^\circ$	$330^\circ$	$360^\circ$
oblúková	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2/3\pi$	$3/4\pi$	$5/6\pi$	$\pi$	$7/6\pi$	$5/4\pi$	$4/3\pi$	$3/2\pi$	$5/3\pi$	$7/4\pi$	$11/6\pi$	$2\pi$

Prevody :  $1 \text{ stupeň} = \pi/180 \text{ radiánov}$

$$1 \text{ radián} = 180/\pi \text{ stupňov}$$

Prevod uhla v stupňovej miere na uhol v oblúkovej miere :  $\alpha(\text{rad}) = \alpha \cdot \frac{\pi}{180} = \alpha \cdot \frac{3,14}{180} \text{ rad}$

Prevod uhla v oblúkovej miere na uhol v stupňovej miere :  $\alpha(^{\circ}) = \alpha \cdot \frac{180^{\circ}}{\pi} = \alpha \cdot \frac{180^{\circ}}{3,14}$

**Príklady :**

1. Koľko radiánov je :  $40^\circ, 50^\circ, 20^\circ, 110^\circ, 100^\circ, 280^\circ, 70^\circ, 15^\circ, 10^\circ, 250^\circ, 80^\circ, 35^\circ$
2. Koľko stupňov je :  $6/4 \text{ rad}, 1/3 \text{ rad}, 2/5 \text{ rad}, 1/8 \text{ rad}, 1/9 \text{ rad}, 5/4 \text{ rad}, 5/6 \text{ rad}, 3/8 \text{ rad}$
3. Dĺžka kružnicového oblúka na jednotkovej kružnici je 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm. Koľko je to radiánov ?
4. Dĺžka kružnicového oblúka na kružnici s polomerom 3 cm je 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm. Koľko je to radiánov ?
5. Koľko stupňov je :  $6/7 \text{ rad}, 2/7 \text{ rad}, 2/11 \text{ rad}, 7/13 \text{ rad}, 5/3 \text{ rad}, 5/7 \text{ rad}, 3/5 \text{ rad}$

**Výsledky :**

1.  $1/9\pi, 5/36\pi, 1/18\pi, 11/36\pi, 5/18\pi, 7/9\pi, 7/36\pi, \pi/12, 1/36\pi, 25/36\pi, 2/9\pi, 35/360\pi$
2.  $270^\circ, 60^\circ, 72^\circ, 22^\circ30', 20^\circ, 225^\circ, 150^\circ, 67^\circ30'$
3.  $1\text{rad}, 2 \text{ rad}, 3 \text{ rad}, 4 \text{ rad}, 5 \text{ rad}, 6 \text{ rad}$
4.  $154^\circ17', 51^\circ26', 65^\circ27', 193^\circ51', 300^\circ, 450^\circ, 128^\circ34', 108^\circ$

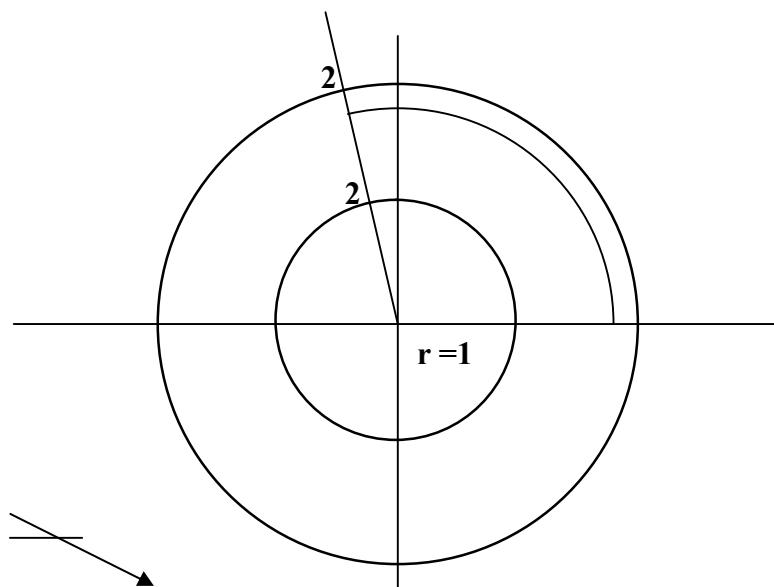
## 1.44 ZOBRAZENIE MNOŽINY REÁLNYCH ČÍSEL DO JEDNOTKOVEJ KRUŽNICE

Dané reálne číslo znázorníme na jednotkovej kružnici tak, že ho vyjadríme v stupňovej mieri. (reálne číslo vyjadruje veľkosť uhla, ktorý je vyjadrený v oblúkovej mieri).

Pr. Znázornite na jednotkovej kružnici číslo 2 :

$$2 \text{ rad} = 2 \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{360}{3,14} = 105^\circ 33'$$

- Narysujeme jednotkovú kružnicu (môže byť aj v mierke zväčšenej)
- Narysujeme uhol  $105^\circ 33'$
- Priesečník ramena uhla s kružnicou znázorňuje polohu čísla 2 na jednotkovej kružnici



Pr. Znázornite na jednotkovej kružnici nasledujúce čísla : a) 4, 5,2, 10,  
b) -2, -3,8, -12

## 1.45. FUNKCIA SÍNUS

**Def. : (podľa pravouhlého trojuholníka)**

Nech je daný pravouhlý trojuholník ABC s preponou c. Funkcia sínus ostrého uhla je pomer protiľahlej odvesny a prepony pravouhlého trojuholníka.

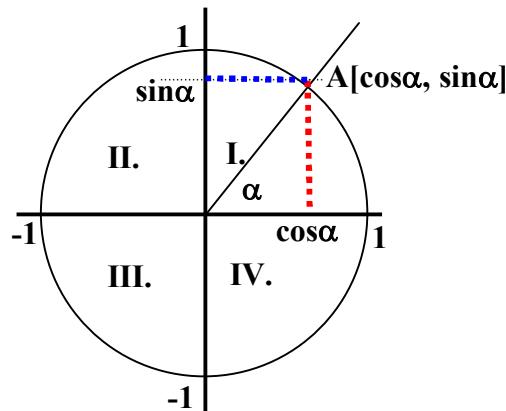
**Def. : (podľa jednotkovej kružnice)**

Pre ľubovoľné reálne číslo x druhú pravouhlú súradnicu obrazu čísla x na jednotkovej kružnici nazývame sínus čísla x.

$$f: y = \sin \alpha$$

Definičný obor funkcie sínus:  $\mathbb{R}$

Obor hodnôt funkcie sínus:  $\langle -1; 1 \rangle$



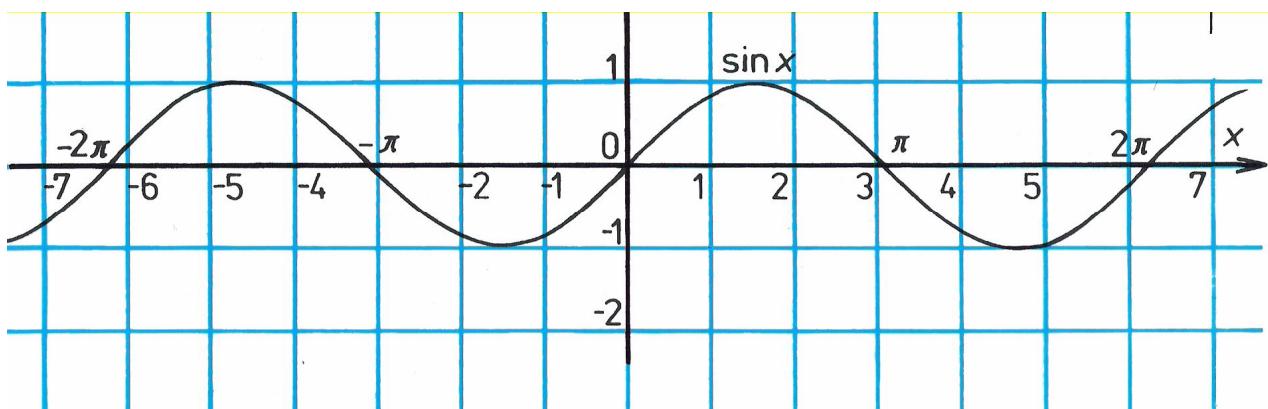
Tabuľka hodnôt funkcie sínus pre  $\alpha \in \langle 0; 2\pi \rangle$

$\alpha(^{\circ})$	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$\alpha(\text{rad})$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2/3\pi$	$3/4\pi$	$5/6\pi$	$\pi$	$7/6\pi$	$5/4\pi$	$4/3\pi$	$3/2\pi$	$5/3\pi$	$7/4\pi$	$11/6\pi$	$2\pi$
$\sin \alpha$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	-1/2	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1/2	0

**Príklady:**

- Pomocou jednotkovej kružnice odhadnite:  $\sin 1,5$ ;  $\sin 0,8$ ;  $\sin 2$ ;  $\sin 3$ ;  $\sin 0,5$ ;  $\sin 3,5$ ;
- Pomocou jednotkovej kružnice odhadnite:  $\sin \pi/5$ ;  $\sin 2/3\pi$ ;  $\sin \pi/4$ ;  $\sin 2/5\pi$ ;  $\sin 3/4\pi$ ;
- Pomocou jednotkovej kružnice určíte riešenie rovnice:  $\sin x = 0,5$ ;  $\sin x = 1$ ;  $\sin x = 0,2$ ;  
 $\sin x = 0,4$ ;  $\sin x = 0,8$ ;
- Určte znamienko funkcie sínus, ak uhly  $\alpha$  sa rovnajú:  $3/2\pi$ ,  $5\pi$ ,  $1/8\pi$ ,  $9/8\pi$ ,  $5/6\pi$ ,  $4/5\pi$ ,  
 $2/7\pi$ ,  $14/3\pi$ ,  $1/7\pi$ ,  $5/8\pi$ ,  $9/4\pi$ ,  $7/8\pi$ ,  $13/7\pi$ ,  $4/9\pi$ ,  $2\pi$ ,  $2/3\pi$ ,  $3/4\pi$ ,  $4/5\pi$ ,  $5/6\pi$ ,  $6/7\pi$ .
- Pomocou kalkulačiek určíte:  $\sin \pi/7$ ;  $\sin 2/5\pi$ ;  $\sin \pi/7$ ;  $\sin 3/5\pi$ ;  $\sin 2/7\pi$ ;
- Pomocou kalkulačiek určíte:  $\sin 36^{\circ}$ ;  $\sin 98^{\circ}$ ;  $\sin 197^{\circ}$ ;  $\sin 269^{\circ}$ ;  $\sin 300^{\circ}23'$ ;

## 1.46. FUNKCIA SÍNUS – GRAF A VLASTNOSTI



**Vlastnosti funkcie sínus :**

- |                                      |   |
|--------------------------------------|---|
| 1. definičný obor:                   | R   |
| 2. je nepárna :                      | $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$                            |
| 3. je periodická s periódou $2\pi$ : | $\sin \alpha = \sin(\alpha + 2k\pi)$ , $k \in \mathbb{Z}$ |
| 4. nie je prostá                     |   |
| 5. je ohraničená :                   | $\langle d, h \rangle = \langle -1, 1 \rangle$            |
| 6. lokálne maximá :                  | $\alpha = \pi/2 + 2k\pi$ , $k \in \mathbb{Z}$             |
| lokálne minimum:                     | $\alpha = k\pi$ , $k \in \mathbb{Z}$                      |
| 7. je spojitá                        |   |
| 8. rastúca :                         | $\langle -\pi/2 + 2k\pi, \pi + 2k\pi \rangle$             |
| klesajúca :                          | $\langle \pi/2 + 2k\pi, 3\pi/2 + 2k\pi \rangle$           |
| 9. obor hodnôt :                     | $\langle -1, 1 \rangle$                                   |
| 10.                                  |   |

kvadrant	I.	II.	III.	IV.
$\sin x$	+	+	-	-

1) Daná je množina  $HGF = \left\{ \frac{2}{3}; 0,4; \frac{7}{5}; 1,5; -\frac{2}{3}; 1; -1; 0; -0,5 \right\}$ . Bez použitia uhlomera a tabuľiek zostrojte uhol  $\alpha$ , ak  $\sin \alpha \in HGF$

2). Daná je množina  $HGF = \left\{ 2; -0,45; \sqrt{4,1}; 0,8; -0,56; -5,6; 1,09; \sqrt{3}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$ .

Ktorý z jej prvkov môže byť hodnotou funkcie  $y = \sin x$

## 1.47. FUNKCIA KOSÍNUS

**Def. : (podľa pravouhlého trojuholníka)**

Nech je daný pravouhlý trojuholník ABC s preponou c. Funkcia kosínus ostrého uhla je pomer príľahlej odvesny a prepony pravouhlého trojuholníka.

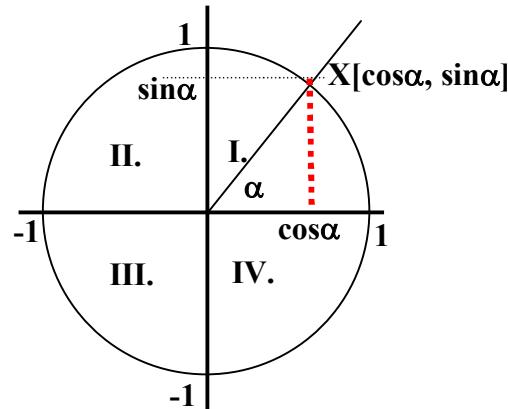
**Def. : (podľa jednotkovej kružnice)**

Pre ľubovoľné reálne číslo x prvú pravouhlú súradnicu obrazu čísla x na jednotkovej kružnici nazývame kosínus čísla x.

$$f: y = \cos \alpha$$

Definičný obor funkcie sínus:  $\mathbb{R}$

Obor hodnôt funkcie sínus:  $\langle -1; 1 \rangle$



Tabuľka hodnôt funkcie kosínus pre  $\alpha \in \langle 0; 2\pi \rangle$

$\alpha(^{\circ})$	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$\alpha(\text{rad})$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2/3\pi$	$3/4\pi$	$5/6\pi$	$\pi$	$7/6\pi$	$5/4\pi$	$4/3\pi$	$3/2\pi$	$5/3\pi$	$7/4\pi$	$11/6\pi$	$2\pi$
$\cos \alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	- $1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	- $1/2$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1

**Príklady:**

- Pomocou jednotkovej kružnice odhadnite  $-\cos 1,5; \cos 0,8; \cos 2; \cos 3; \cos 0,5; \cos 4$
- Pomocou jednotkovej kružnice odhadnite  $-\cos \pi/5; \cos 2/3\pi; \cos \pi/4; \cos 2/5\pi; \cos 3/4\pi$
- Pomocou jednotkovej kružnice určíte riešenie rovnice:  $\cos x=0,5; \cos x = 1; \cos x = 0,2; \cos x = 0,4; \cos x = 0,8;$
- Určte znamienko funkcie kosínus, ak uhly  $\alpha$  sa rovnajú:  $3/2\pi, 5\pi, 1/8\pi, 9/8\pi, 5/6\pi, 4/5\pi, 2/7\pi, 14/3\pi, 1/7\pi, 5/8\pi, 9/4\pi, 7/8\pi, 13/7\pi, 4/9\pi, 2\pi, 2/3\pi, 3/4\pi, 4/5\pi, 5/6\pi, 6/7\pi$ .
- Pomocou kalkulačiek určíte:  $\cos \pi/9; \cos 3/7\pi; \cos \pi/8; \cos 3/10\pi; \cos 9/7\pi;$
- Pomocou kalkulačiek určíte:  $\cos 44^{\circ}; \cos 109^{\circ}; \cos 187^{\circ}; \cos 243^{\circ}; \cos 333^{\circ}33'$

Učebnica M 4 : str.15

str.15 - 1. e,f,

- 2. c,d,f

- 3. b,d,f

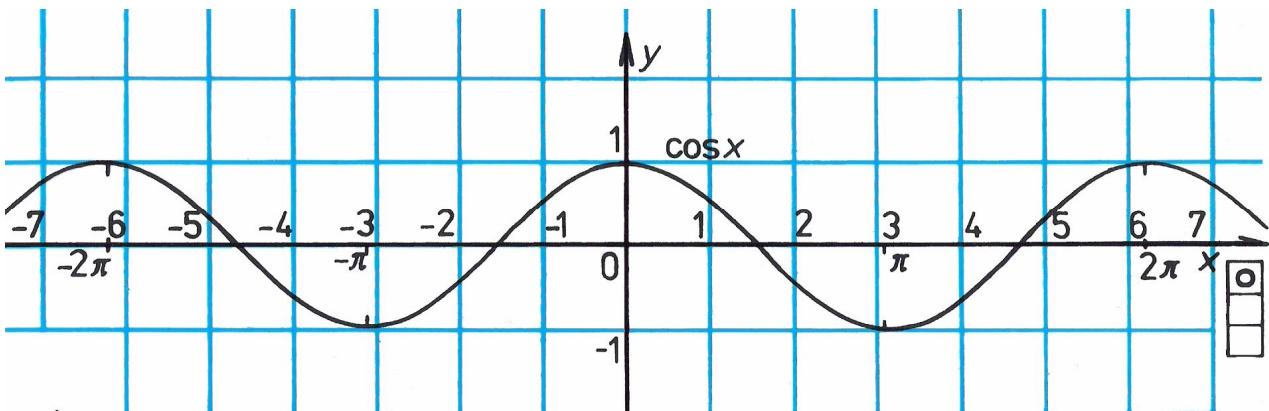
- 4. C

- 6. e,f,g

- 8.

str.16 - 13

## 1.48. FUNKCIA KOSÍNUS – GRAF A VLASTNOSTI



**Vlastnosti funkcie kosínus :**

1. definičný obor:  $\mathbb{R}$
2. je párná :  $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$
3. je periodická s periódou  $2\pi$ :  $\cos \alpha = \cos(\alpha + 2k\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$
4. nie je prostá
5. je ohraničená :  $\langle d, h \rangle = \langle -1, 1 \rangle$
6. lokálne maximá :  $\alpha = 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$   
lokálne minimum:  $\alpha = \pi + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$
7. je spojité
8. rastúca :  $\langle \pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi \rangle$   
klesajúca :  $\langle 0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi \rangle$
9. obor hodnôt :  $\langle -1, 1 \rangle$
- 10.

kvadrant	I.	II.	III.	IV.
$\cos x$	+	-	-	+

1) Daná je množina  $HGF = \left\{ \frac{2}{3}; 0,4; \frac{7}{5}; 1,5; -\frac{2}{3}; 1; -1; 0; -0,5 \right\}$ . Bez použitia uhlomera a tabuľiek zostrojte uhol  $\alpha$ , ak  $\cos \alpha \in HGF$

2). Daná je množina  $HGF = \left\{ 2; -0,45; \sqrt{4,1}; 0,8; -0,56; -5,6; 1,09; \sqrt{3}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$ .

Ktorý z jej prvkov môže byť hodnotou funkcie  $y = \cos x$

3) Do ktorého z intervalov  $\left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle, \left\langle \frac{\pi}{2}; \pi \right\rangle, \left\langle \pi; \frac{3\pi}{2} \right\rangle, \left\langle \frac{3\pi}{2}; 2\pi \right\rangle$  patrí  $x$ , pre ktoré platí:

- a)  $\sin x = 0,8$  a zároveň  $\cos x < 0$ ;
- b)  $\sin x \leq 0$  a zároveň  $\cos x = -0,3$ ;

## 1.49. FUNKCIA TANGENS

**Def. : (podľa pravouhlého trojuholníka)**

Nech je daný pravouhlý trojuholník ABC s preponou c. Funkcia tangens ostrého uhla je pomer protiľahlej odvesny k priľahlej odvesne pravouhlého trojuholníka.

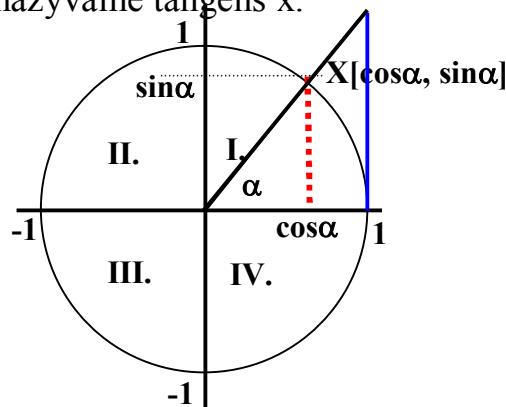
**Def. : (podľa jednotkovej kružnice)**

Pre ľubovoľné reálne číslo x rôzne od čísel  $(2k+1)\pi/2 = \pi/2 + k\pi$ , pričom k je celé číslo, má podiel  $\sin x : \cos x$  zmysel. Tento podiel nazývame tangens x.

$$f: y = \operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$$

Definičný obor funkcie sínus:  $R - \{\pi/2 + k\pi\}$

Obor hodnôt funkcie sínus:  $R$



Tabuľka hodnôt funkcie tangens pre  $\alpha \in <0; 2\pi>$

$\alpha(^{\circ})$	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$\alpha(\text{rad})$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2/3\pi$	$3/4\pi$	$5/6\pi$	$\pi$	$7/6\pi$	$5/4\pi$	$4/3\pi$	$3/2\pi$	$5/3\pi$	$7/4\pi$	$11/6\pi$	$2\pi$
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	N	$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	N	$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$	0

Príklady:

1. Pomocou jednotkovej kružnice odhadnite –  $\operatorname{tg} 1,5$ ;  $\operatorname{tg} 0,8$ ;  $\operatorname{tg} 2$ ;  $\operatorname{tg} 3$ ;  $\operatorname{tg} 0,5$ ;  $\operatorname{tg} 4$
2. Pomocou jednotkovej kružnice odhadnite –  $\operatorname{tg} \pi/5$ ;  $\operatorname{tg} 2/3\pi$ ;  $\operatorname{tg} \pi/4$ ;  $\operatorname{tg} 2/5\pi$ ;  $\operatorname{tg} 3/4\pi$
3. Pomocou jednotkovej kružnice určíte riešenie rovnice:  $\operatorname{tg} x = 0,5$ ;  $\operatorname{tg} x = 1$ ;  $\operatorname{tg} x = 0,2$ ;  $\operatorname{tg} x = 0,4$ ;  $\operatorname{tg} x = 0,8$ ;
4. Určte znamienko funkcie tangens, ak uhly  $\alpha$  sa rovnajú :  $3/2\pi$ ,  $5\pi$ ,  $1/8\pi$ ,  $9/8\pi$ ,  $5/6\pi$ ,  $4/5\pi$ ,  $2/7\pi$ ,  $14/3\pi$ ,  $1/7\pi$ ,  $5/8\pi$ ,  $9/4\pi$ ,  $7/8\pi$ ,  $13/7\pi$ ,  $4/9\pi$ ,  $2\pi$ ,  $2/3\pi$ ,  $3/4\pi$ ,  $4/5\pi$ ,  $5/6\pi$ ,  $6/7\pi$ .
5. Pomocou kalkulačiek určíte:  $\operatorname{tg} \pi/9$ ;  $\operatorname{tg} 3/7\pi$ ;  $\operatorname{tg} \pi/8$ ;  $\operatorname{tg} 3/10\pi$ ;  $\operatorname{tg} 9/7\pi$ ;
6. Pomocou kalkulačiek určíte:  $\operatorname{tg} 44^{\circ}$ ;  $\operatorname{tg} 109^{\circ}$ ;  $\operatorname{tg} 187^{\circ}$ ;  $\operatorname{tg} 243^{\circ}$ ;  $\operatorname{tg} 333^{\circ}33'$ ;

Učebnica M 1 : str.35 / Pr. 1, 2, 3, 4,

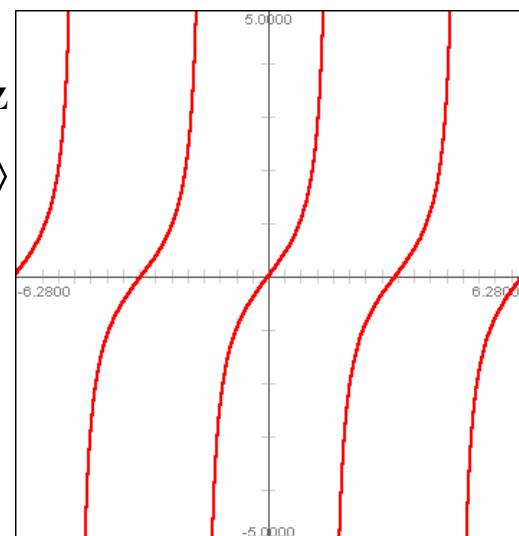
Učebnica M 4 : str.16 / Pr. 1, 2, 3, 8, 10, 11, 12, 13, 14

## 1.50. FUNKCIA TANGENS – GRAF A VLASTNOSTI

### Vlastnosti funkcie tangens :

- 1. definičný obor:  $\mathbb{R} - \{\pi/2 + k\pi\}$
- 2. je nepárna :  $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$
- 3. je periodická s periódou  $\pi$ :  $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\alpha + k\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$
- 4. nie je prostá  
je prostá
- 5. nie je ohraničená :
- 6. nemá lokálne maximum :  
nemá lokálne minimum:
- 7. nie je spojitá
- 8. rastúca :  
klesajúca :  
 $\langle -\pi/2 + k\pi, \pi + k\pi \rangle$   
nie je
- 9. obor hodnôt :  $\mathbb{R}$
- 10.

kvadrant	I.	II.	III.	IV.
$\operatorname{tg} x$	+	-	+	-



1) Daná je množina  $HGF = \left\{ \frac{2}{3}; 0,4; \frac{7}{5}; 1,5; -\frac{2}{3}; 1; -1; 0; -0,5 \right\}$ . Bez použitia uhlomera a tabuľiek zostrojte uhol  $\alpha$ , ak  $\operatorname{tg} \alpha \in HGF$

2). Daná je množina  $HGF = \left\{ 2; -0,45; \sqrt{4,1}; 0,8; -0,56; -5,6; 1,09; \sqrt{3}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$ .

Ktorý z jej prvkov môže byť hodnotou funkcie:  $y = \operatorname{tg} x$

## 1.51. FUNKCIA KOTANGENS

**Def. : (podľa pravouhlého trojuholníka)**

Nech je daný pravouhlý trojuholník ABC s preponou c. Funkcia kotangens ostrého uhla je pomer príľahlej odvesny k protiľahlej odvesne pravouhlého trojuholníka.

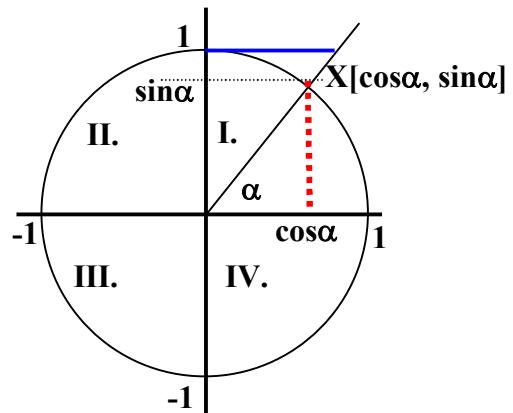
**Def. : (podľa jednotkovej kružnice)**

Pre ľubovoľné reálne číslo x rôzne od čísel  $\pi \cdot k$ , pričom k je celé číslo, má podiel  $\cos x : \sin x$  zmysel. Tento podiel nazývame tangens x.

$$f: y = \cotg \alpha = \cos \alpha / \sin \alpha$$

Definičný obor funkcie kotangens:  $R - \{k\pi\}$

Obor hodnôt funkcie kotangens:  $R$



Tabuľka hodnôt funkcie kotangens pre  $\alpha \in <0; 2\pi>$

$\alpha(^{\circ})$	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$\alpha(\text{rad})$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2/3\pi$	$3/4\pi$	$5/6\pi$	$\pi$	$7/6\pi$	$5/4\pi$	$4/3\pi$	$3/2\pi$	$5/3\pi$	$7/4\pi$	$11/6\pi$	$2\pi$
$\cotg \alpha$	N	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	$-\sqrt{3}/3$	-1	$-\sqrt{3}$	N	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	$-\sqrt{3}/3$	-1	$-\sqrt{3}$	N

Príklady:

1. Pomocou jednotkovej kružnice odhadnite  $-\operatorname{tg} 1,5$ ;  $\operatorname{tg} 0,8$ ;  $\operatorname{tg} 2$ ;  $\operatorname{tg} 3$ ;  $\operatorname{tg} 0,5$ ;  $\operatorname{tg} 4$
2. Pomocou jednotkovej kružnice odhadnite  $-\operatorname{tg} \pi/5$ ;  $\operatorname{tg} 2/3\pi$ ;  $\operatorname{tg} \pi/4$ ;  $\operatorname{tg} 2/5\pi$ ;  $\operatorname{tg} 3/4\pi$
3. Pomocou jednotkovej kružnice určíte riešenie rovnice:  $\operatorname{tg} x = 0,5$ ;  $\operatorname{tg} x = 1$ ;  $\operatorname{tg} x = 0,2$ ;  $\operatorname{tg} x = 0,4$ ;  $\operatorname{tg} x = 0,8$ ;
4. Určte znamienko funkcie tangens, ak uhly  $\alpha$  sa rovnajú:  $3/2\pi$ ,  $5\pi$ ,  $1/8\pi$ ,  $9/8\pi$ ,  $5/6\pi$ ,  $4/5\pi$ ,  $2/7\pi$ ,  $14/3\pi$ ,  $1/7\pi$ ,  $5/8\pi$ ,  $9/4\pi$ ,  $7/8\pi$ ,  $13/7\pi$ ,  $4/9\pi$ ,  $2\pi$ ,  $2/3\pi$ ,  $3/4\pi$ ,  $4/5\pi$ ,  $5/6\pi$ ,  $6/7\pi$ .

Učebnica M 1 : str.35 / Pr. 1, 2, 3, 4,

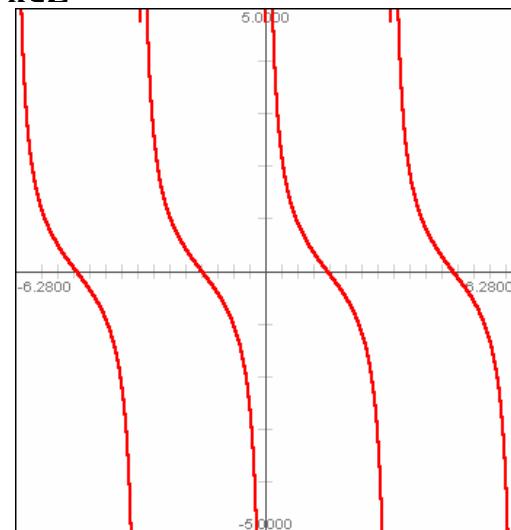
Učebnica M 4 : str.16 / Pr. 1, 2, 3, 8, 10, 11, 12, 13, 14

## 1.52. FUNKCIA KOTANGENS – GRAF A VLASTNOSTI

### Vlastnosti funkcie cotangens :

1. definičný obor:  $\mathbb{R} - \{k\pi\}$
2. je nepárna :  $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$
3. je periodická s periódou  $\pi$ :  $\cot \alpha = \cot(\alpha + k\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$
4. nie je prostá  
je prostá
5. nie je ohraničená :
6. nemá lokálne maximum : nemá lokálne minimum:
7. nie je spojité
8. rastúca : nie je  
klesajúca :  $\langle 0 + k\pi, \pi + k\pi \rangle$
9. obor hodnôt :  $\mathbb{R}$
- 10.

kvadrant	I.	II.	III.	IV.
cotg x	+	-	+	-



1) Daná je množina  $HGF = \left\{ \frac{2}{3}; 0,4; \frac{7}{5}; 1,5; -\frac{2}{3}; 1; -1; 0; -0,5 \right\}$ . Bez použitia uhlomera a tabuľiek zostrojte uhol  $\alpha$ , ak  $\cot \alpha \in HGF$

2). Daná je množina  $HGF = \left\{ 2; -0,45; \sqrt{4,1}; 0,8; -0,56; -5,6; 1,09; \sqrt{3}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$ .

Ktorý z jej prvkov môže byť hodnotou funkcie:  $y = \cot x$ ?

3) Vypočítajte:

a)  $\cot \frac{12}{8}\pi \cdot \tg 11\pi \cdot \cot \frac{19}{3}\pi \cdot \tg(-7\pi)$

b) 
$$\frac{\tg\left(-\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cot g\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(-\frac{3}{2}\pi\right) \cdot \cos(-4\pi)}$$

4) Usporiadajte podľa veľkosti čísla:

a)  $\sin 60^\circ, \cos 60^\circ, \tg 60^\circ, \cotg 60^\circ$

b)  $\tg \frac{10}{3}\pi, \cot g\left(-\frac{2}{3}\pi\right), \sin(-3\pi), \cos 2\pi$

## 1.53. ZLOŽENÉ FUNKCIE

1. Určte definičné obory :

a) $y = 1/\sin x$	b) $y = 1/(1+\sin x)$	c) $y = 2/(\sqrt{2}/2 - \sin x)$	d) $y = 3 / (1/2 + \sin x)$
$y = -1/\sin x$	$y = 1/(-1+\sin x)$	$y = 2/(-\sqrt{2}/2 - \sin x)$	$y = 3 / (-1/2 + \sin x)$
$y = -2/\sin x$	$y = 1/(1-\sin x)$	$y = 2/(\sqrt{2}/2 + \sin x)$	$y = 3 / (-1/2 - \sin x)$

2. Určte definičné obory :

a) $y = 1/\cos x$	b) $y = 1/(1+\cos x)$	c) $y = 2/(\sqrt{2}/2 - \cos x)$	d) $y = 3/(1/2 + \cos x)$
$y = -1/\cos x$	$y = 1/(-1+\cos x)$	$y = 2/(-\sqrt{2}/2 - \cos x)$	$y = 2/(-1/2 + \cos x)$
$y = -2/\cos x$	$y = 1/(1-\cos x)$	$y = 2/(\sqrt{2}/2 + \cos x)$	$y = -1/(-1/2 - \cos x)$

3. Určte definičné obory :

a) $y = 1/\tan x$	b) $y = 1/(1+\tan x)$	c) $y = 2/(\sqrt{3} - \tan x)$	d) $y = 3 / (\sqrt{3}/3 + \tan x)$
$y = -1/\tan x$	$y = 1/(-1+\tan x)$	$y = 2/(-\sqrt{3} - \tan x)$	$y = 3 / (\sqrt{3}/3 + \tan x)$
$y = -2/\tan x$	$y = 1/(1-\tan x)$	$y = 2/(\sqrt{3} + \tan x)$	$y = 3 / (-\sqrt{3}/3 + \tan x)$

4. Určte definičné obory :

a) $y = 1/\cot x$	b) $y = 1/(1+\cot x)$	c) $y = 2/(\sqrt{3} - \cot x)$	d) $y = 3 / (\sqrt{3}/3 + \cot x)$
$y = -1/\cot x$	$y = 1/(-1+\cot x)$	$y = 2/(-\sqrt{3} - \cot x)$	$y = 3 / (\sqrt{3}/3 + \cot x)$
$y = -2/\cot x$	$y = 1/(1-\cot x)$	$y = 2/(\sqrt{3} + \cot x)$	$y = 3 / (-\sqrt{3}/3 + \cot x)$

5) Určte obor definície funkcie:

a)  $y = \frac{\sin x}{\sqrt{2} + 2 \cdot \cos x}$       b)  $y = \sqrt{\sin x \cdot \cos x}$       c)  $y = \tan(x + \pi)$       d)  $y = \cot(x - \frac{\pi}{3})$

## 1.54. GRAFY ĎALŠÍCH GONIOMETRICKÝCH FUNKCIÍ

1. Načrtnite grafy funkcií  $f_1$  až  $f_9$ . Určte periódu, vypočítajte priesečníky grafu funkcie s osou x a y, určíte obor funkčných hodnôt:

$$f_1 : y = \sin x$$

$$f_2 : y = \sin x + 2$$

$$f_3 : y = \sin(x+2)$$

$$f_4 : y = 2\sin x$$

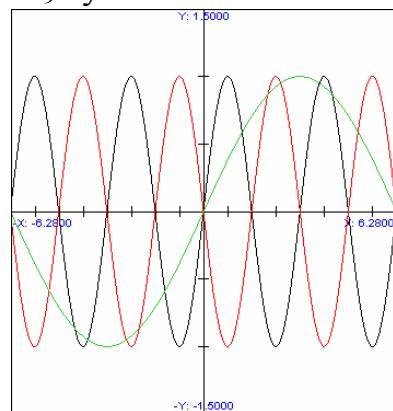
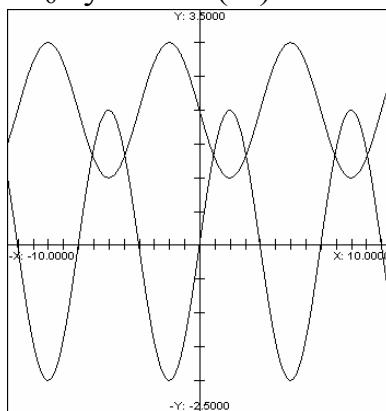
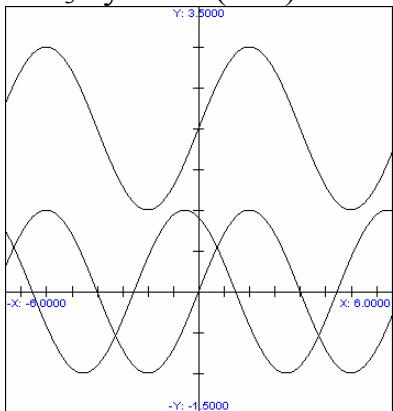
$$f_5 : y = -\sin x + 2$$

$$f_6 : y = -2\sin(-x)$$

$$f_7 : y = \sin 2x$$

$$f_8 : y = \sin(-2x)$$

$$f_9 : y = \sin x/2$$



2. Načrtnite grafy funkcií  $g_1$  až  $g_9$ . Určte periódu, vypočítajte priesečníky grafu funkcie s osou x a y, určíte obor funkčných hodnôt:

$$g_1 : y = \cos x$$

$$g_2 : y = \cos x - \pi/4$$

$$g_3 : y = \pi/4 - \cos x$$

$$g_4 : y = \cos(x - \pi/4)$$

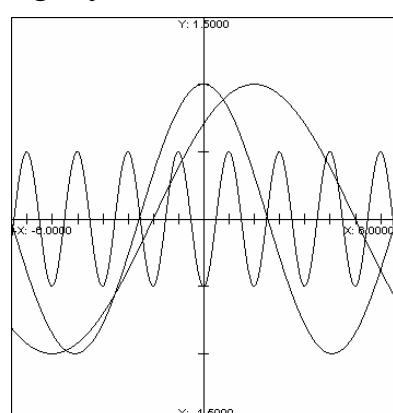
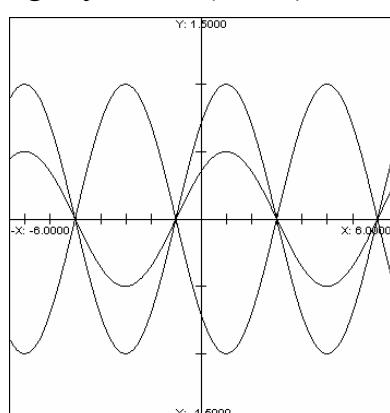
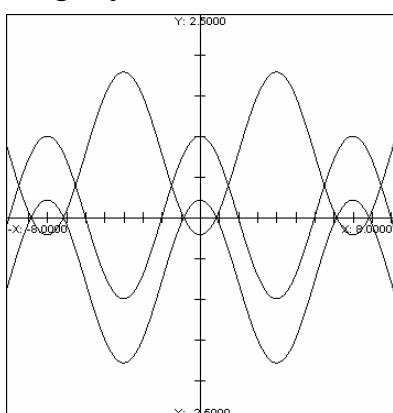
$$g_5 : y = 1/2\cos(x - \pi/4)$$

$$g_6 : y = -\cos(\pi/4 - x)$$

$$g_7 : y = \cos(x/2 - \pi/4)$$

$$g_8 : y = -1/2\cos 4x$$

$$g_9 : y = \cos \pi x/4$$



3. Načrtnite grafy funkcií  $f_1$  až  $f_9$ . Určte definičný obor, periódu, vypočítajte priesečníky grafu funkcie s osou x a y, určíte obor funkčných hodnôt:

$$f_1 : y = \operatorname{tg} x$$

$$f_2 : y = \operatorname{tg} x + \pi/6$$

$$f_3 : y = \operatorname{tg}(x + \pi/6)$$

$$f_4 : y = 2\operatorname{tg} x$$

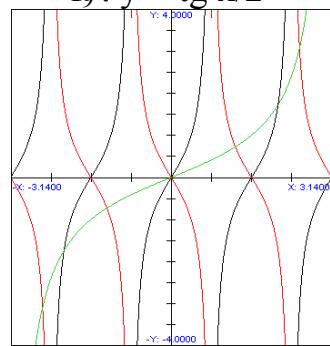
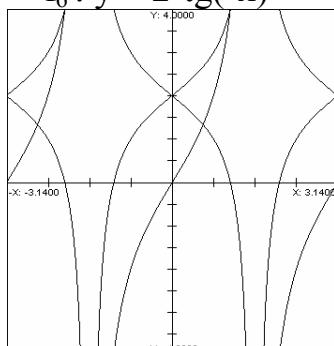
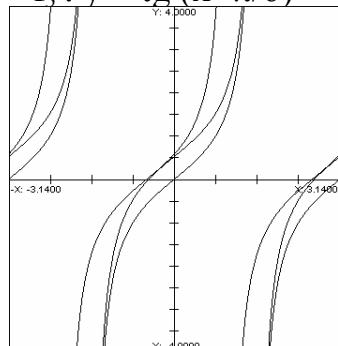
$$f_5 : y = -\operatorname{tg} x + 2$$

$$f_6 : y = 2 - \operatorname{tg}(-x)$$

$$f_7 : y = \operatorname{tg} 2x$$

$$f_8 : y = \operatorname{tg}(-2x)$$

$$f_9 : y = \operatorname{tg} x/2$$



4. Načrtnite grafy funkcií  $g_1$  až  $g_9$ . Určte definičný obor, periódu, vypočítajte prie-  
sečníky grafu funkcie s osou x a y, určíte obor funkčných hodnôt:

$$g_1 : y = \cotg x$$

$$g_2 : y = \cotg x - \pi/3$$

$$g_3 : y = \pi/3 - \cotg x$$

$$g_4 : y = \cotg(x - \pi/3)$$

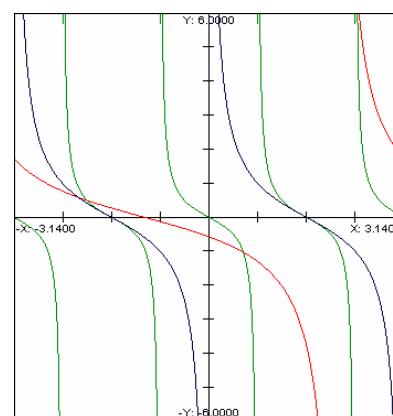
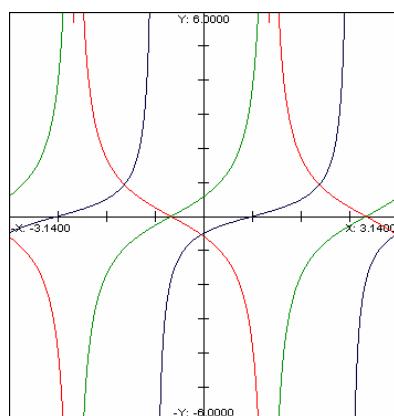
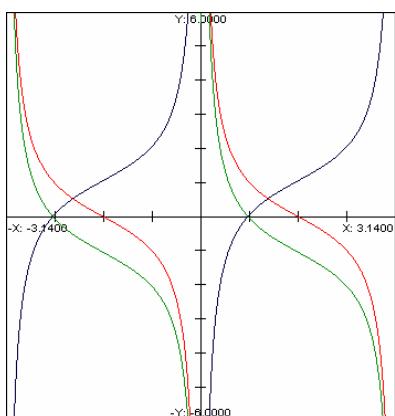
$$g_5 : y = \cotg(\pi/3 - x)$$

$$g_6 : y = 1/2 \cotg(x - \pi/4)$$

$$g_7 : y = \cotg(x/2 - \pi/3)$$

$$g_8 : y = -1/2 \cotg 2x$$

$$g_9 : y = \cotg \pi x$$



5. Načrtnite grafy funkcií  $f_1$  až  $f_4$ ,  $g_1$  až  $g_4$  a podľa obrázkov rozhodnite, ktorá dvojica funkcií sa navzájom rovná.

$$f_1 : y = \sin(x + \pi/2) \quad f_3 : y = \sin(x - \pi/2)$$

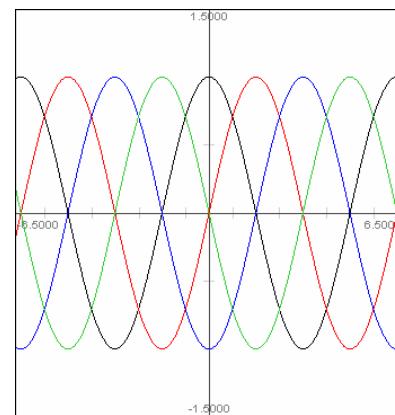
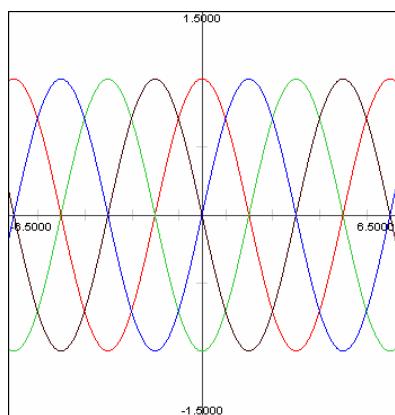
$$f_2 : y = \cos(x + \pi/2) \quad f_4 : y = \cos(x - \pi/2)$$

$$g_1 : y = \sin x$$

$$g_2 : y = \cos x$$

$$g_3 : y = -\sin x$$

$$g_4 : y = -\cos x$$



6. Načrtnite grafy funkcií  $f_1$  až  $f_4$ ,  $g_1$  až  $g_4$  a podľa obrázkov rozhodnite, ktorá dvojica funkcií sa navzájom rovná.

$$f_1 : y = \operatorname{tg}(x + \pi/2) \quad f_3 : y = \operatorname{tg}(x - \pi/2)$$

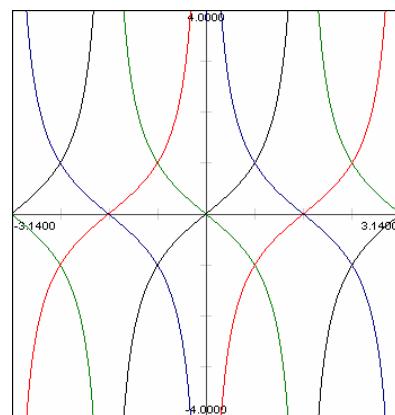
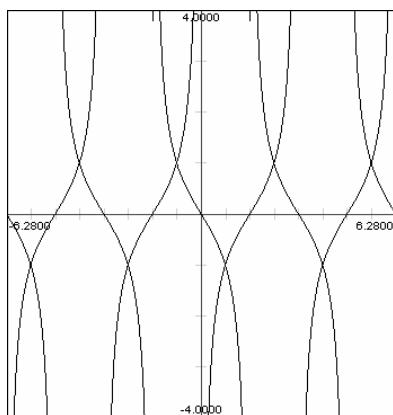
$$f_2 : y = \cotg(x + \pi/2) \quad f_4 : y = \cotg(x - \pi/2)$$

$$g_1 : y = \operatorname{tg} x$$

$$g_2 : y = \cotg x$$

$$g_3 : y = -\operatorname{tg} x$$

$$g_4 : y = -\cotg x$$



## 1.55-1.56 VZŤAHY MEDZI GONIOMETRICKÝMI FUNKCIAMI

1.  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

2.  $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1$

3. I.periodickost' :       $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$        $\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x$   
                                 $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$        $\operatorname{cotg}(x + k\pi) = \operatorname{cotg} x$

II.periodickost' :

$\sin(90^\circ \pm x) = +\cos x$	$\sin(180^\circ \pm x) = -+\cos x$	$\sin(270^\circ \pm x) = -\cos x$
$\cos(90^\circ \pm x) = -+\sin x$	$\cos(180^\circ \pm x) = -\cos x$	$\cos(270^\circ \pm x) = \pm\sin x$
$\operatorname{tg}(90^\circ \pm x) = -+\operatorname{cotg} x$	$\operatorname{tg}(180^\circ \pm x) = \pm\operatorname{tg} x$	$\operatorname{tg}(270^\circ \pm x) = -+\operatorname{cotg} x$
$\operatorname{cotg}(90^\circ \pm x) = -+\operatorname{tg} x$	$\operatorname{cotg}(180^\circ \pm x) = \pm\operatorname{cotg} x$	$\operatorname{cotg}(270^\circ \pm x) = -+\operatorname{tg} x$

4. záporný argument :     $\sin(-x) = -\sin x$        $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$   
                                 $\cos(-x) = \cos x$        $\operatorname{cotg}(-x) = \operatorname{cotg} x$

Pr.

1. M1 – 40 / Pr.1.

2. M1 - 41/ Cv.1, 3,

3. M4 - 18/ Cv.1, 2, - 19/cv. 3,

## 1.57. SÚČTOVÉ A ROZDIELOVÉ VZORCE

G.FUNKCIE SÚČTU :

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x \\ \cos(x+y) &= \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y \\ \operatorname{tg}(x+y) &= (\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y) : (1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y) \\ \operatorname{cotg}(x+y) &= (\operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cotg} y - 1) : (\operatorname{cotg} y + \operatorname{cotg} x)\end{aligned}$$

G.FUNKCIE ROZDIELU :

$$\begin{aligned}\sin(x-y) &= \sin x \cdot \cos y - \sin y \cdot \cos x \\ \cos(x-y) &= \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y \\ \operatorname{tg}(x-y) &= (\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y) : (1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y) \\ \operatorname{cotg}(x-y) &= (\operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cotg} y + 1) : (\operatorname{cotg} y - \operatorname{cotg} x)\end{aligned}$$

Pr.

M4 - 19/ cv. 4, 10,

1. Vypočítajte hodnoty goniometrických funkcií sin, cos, tg, cotg pre uhly :  $15^\circ$ ,  $75^\circ$ ,  $105^\circ$ ,  $135^\circ$ ,  $150^\circ$ ,  $165^\circ$ ,  $195^\circ$ .
2. Vypočítajte hodnoty goniometrických funkcií sin, cos, tg, cotg pre uhly :  $7^{\circ}30'$ ,  $22^{\circ}30'$ ,  $67^{\circ}30'$ .
3. Vypočítajte hodnoty goniometrických funkcií sin, cos, tg, cotg pre uhly :  $\pi/12$ ,  $5\pi/12$ ,  $\pi/24$ .
4. a) Vypočítajte  $\sin 39^\circ$ , ak  $\sin 9^\circ = 0,1564$ .  
b) Vypočítajte  $\cos 72^\circ$ , ak  $\cos 12^\circ = 0,9781$ .  
c) Vypočítajte  $\operatorname{tg} 85^\circ$ , ak  $\operatorname{tg} 5^\circ = 0,0875$ .  
d) Vypočítajte  $\operatorname{tg} 70^\circ$ , ak  $\sin 10^\circ = 0,1736$ .  
e) Vypočítajte  $\operatorname{cotg} 80^\circ$ , ak  $\cos 20^\circ = 0,9397$ .
5. str.148/4.39

## 1.58. GONIOMETRICKÉ FUNKCIE PREMENNÝCH 2x

$$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \cdot \sin^2 x = 2 \cdot \cos^2 x - 1$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{2 \cdot \sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{1}{\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{2 \cdot \sin x \cdot \cos x}} = \frac{1}{\frac{\cos x}{2 \cdot \sin x} - \frac{\sin x}{2 \cdot \cos x}} = \frac{1}{\frac{1}{2 \cdot \operatorname{tg} x} - \frac{\operatorname{tg} x}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{1 - \operatorname{tg}^2 x}} = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\operatorname{cotg} 2x = \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{2 \cdot \sin x \cdot \cos x} = \frac{\cos x}{2 \sin x} - \frac{\sin x}{2 \cdot \cos x} = \frac{\operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} x}{2} = \frac{\operatorname{cotg} x}{2} - \frac{1}{2 \cdot \operatorname{cotg} x} =$$

$$\Rightarrow \operatorname{cotg} 2x = \frac{\operatorname{cotg}^2 x - 1}{2 \cdot \operatorname{cotg} x} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{2 \cdot \operatorname{tg} x}$$

- Pr.
1. Odvod'te vzťahy pre  $\operatorname{tg} 2x$ ,  $\operatorname{cotg} 2x$ .
  2. a) Vypočítajte  $\sin 38^\circ$ , ak  $\sin 19^\circ = 0,3256$ .  
b) Vypočítajte  $\cos 72^\circ$ , ak  $\cos 36^\circ = 0,8090$ .  
c) Vypočítajte  $\operatorname{tg} 84^\circ$ , ak  $\operatorname{tg} 42^\circ = 0,9004$ .  
d) Vypočítajte  $\operatorname{tg} 70^\circ$ , ak  $\sin 35^\circ = 0,5736$ .  
e) Vypočítajte  $\operatorname{cotg} 80^\circ$ , ak  $\cos 40^\circ = 0,766$ .
  3. a) Vyjadrite  $\sin 3x$  pomocou  $\sin x$ . b) vyjadrite  $\cos 3x$  pomocou  $\cos x$ .

## 1.59. GONIOMETRICKÉ FUNKCIE PREMENNÝCH x/2

$$\cos 2x = 1 - 2 \cdot \sin^2 x \Rightarrow \sin^2 x = (1 - \cos 2x) : 2 \Rightarrow$$

$$|\sin x| = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}} \Rightarrow \left| \sin \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

$$\cos 2x = 2 \cdot \cos^2 x - 1 \Rightarrow \cos^2 x = (\cos 2x + 1) : 2 \Rightarrow$$

$$|\cos x| = \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}} \Rightarrow \left| \cos \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

$$|\operatorname{tg} x| = \frac{|\sin x|}{|\cos x|} = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}} \Rightarrow \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| = \frac{\left| \sin \frac{x}{2} \right|}{\left| \cos \frac{x}{2} \right|} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$$

1. Odvod'te vzťahy pre  $\operatorname{tg} 0,5x$ ,  $\operatorname{cotg} 0,5x$ .
2. Vypočítajte  $\sin 0,5x$ ,  $\cos 0,5x$ ,  $\operatorname{tg} 0,5x$ , ak :  $\sin x = 1/3$  a  $\cos x < 0$ .
3. str.151/4.45 Zjednodušte :  $\cos 2x + \sin 2x \cdot \operatorname{tg} x =$
4. str.152/4.47, 4.48

## **1.60. SÚČET HODNÔT GONIOMETRICKÝCH FUNKCIÍ**

$$\sin x + \sin y = 2 \cdot \sin(x+y)/2 \cdot \cos(x-y)/2$$
$$\cos x + \cos y = 2 \cdot \cos(x+y)/2 \cdot \cos(x-y)/2$$

## **1.61. ROZDIEL HODNÔT GONIOMETRICKÝCH FUNKCIÍ**

$$\sin x - \sin y = 2 \cdot \cos(x+y)/2 \cdot \sin(x-y)/2$$
$$\cos x - \cos y = -2 \cdot \sin(x+y)/2 \cdot \sin(x-y)/2$$

Pr.

1. 154 / 4.49, 4.50, 4.51, 4.52, 4.53 – Matematika pre 2. roč./FUNKCIE
2. 6.12 / 60, 61, 62, 63, 64 -

## 19. JEDNODUCHÉ GONIOMETRICKÉ ROVNICE

## 20.-22. ZLOŽITEJŠIE GONIOMETRICKÉ ROVNICE

6.9/47,48

6.10/52

### Goniometrické rovnice

1. Riešte v R:

$$a) \sin x = \frac{1}{2}$$

$$b) \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$c) \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$d) \cos x = -1$$

$$e) \operatorname{tg} x = \sqrt{3}$$

$$f) \operatorname{cot} g x = -\sqrt{3}$$

2. Riešenie nasledujúcich rovníc vyjadrite v stupňovej mieri:

$$a) \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$b) \cos x = \frac{1}{2}$$

$$c) \operatorname{tg} x = 1$$

3. Riešte v R:

$$a) 2 \cdot \frac{\cos x + 1}{3} - \frac{4 \cdot \cos x - 1}{2} = 1 - \cos x$$

$$b) \frac{5 \cdot \sin x + 4}{10 \cdot \sin x + 4} = 1$$

$$c) \sin x = \sin \pi - \cos \frac{\pi}{3}$$

$$d) \cos x - \cos \frac{5}{2} \pi = \sin \frac{5}{2} \pi + \cos \frac{5}{2} \pi$$

4. Riešte rovnice v intervale  $\langle 0, 360^\circ \rangle$  použitím kalkulačky alebo tabuľiek. (Výsledky zapíšte v stupňovej mieri s presnosťou na minúty).

$$a) \cos x = 0,2425$$

$$b) \operatorname{tg} x = -35$$

$$c) 4 \cdot \operatorname{cot} g x = \pi$$

5. Riešte v R:

$$a) \sin 3x = 1$$

$$b) \cos 10x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$c) \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$d) \cos\left(3x + \frac{5}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}$$

$$e) \operatorname{tg}(4x - 3) = 1$$

$$f) \operatorname{cot} g\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$g) \sin(1-x) = 0$$

$$h) \sqrt{2} \cdot \cos(4\pi + 2x) = -1$$

6. Riešte v R:

$$a) 2 \cdot \cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

$$b) 4 \cdot \sin^2 x - 2 \cdot \sin x = \sqrt{3}(-1 + 2 \cdot \sin x)$$

$$c) 2 \cdot \sin^2 x + 3 \cos x = 0$$

$$d) 2 \cdot \cos^2 x - 3 = 3 \cdot \sin x$$

$$e) 2 \cdot \sin^2 x + 3 \cdot \sqrt{2} \cos x - 4 = 0$$

$$f) \sin^2 x - \cos^2 x + \sqrt{3} \cdot \sin x - 2 = 0$$

$$g) 12 \cdot \sin^4 x + \sin^2 x - 1 = 0$$

$$h) 8 \cdot \cos^4 x - 10 \cdot \cos^2 x + 3 = 0$$

$$i) \sin^4 x - \cos^4 x = -1$$

$$j) \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 2 = 0$$

$$k) \operatorname{tg} x + \operatorname{cot} g x - 2 = 0$$

$$l) \operatorname{tg}^2 x + 3 \cdot \operatorname{cot} g^2 x - 4 = 0$$

7. Riešte v R:

a)  $2 \cdot \sin^2 5x + 3 \cdot \cos 5x = 0$

c)  $2 \cdot \cos^2 8x = 3 - 3 \cdot \sin 8x$

b)  $2 \cdot \sin^2 \frac{x}{3} + 3 \cdot \cos \frac{x}{3} = 0$

d)  $3 \cdot \operatorname{tg}^4 3x + 1 = 4 \cdot \operatorname{tg}^2 3x$

8. Riešte v R:

a)  $2 \cdot \sin^2 x - \sin x = 0$

c)  $3 \cdot \cos^2 x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$

e)  $4 \cdot \cos^2 x = 3 \cdot \cot g^2 x$

g)  $5 \cdot \sin x + 4 \cdot \cos x - 10 \cdot \sin x \cdot \cos x = 2$

i)  $2 \cdot \sin x + \operatorname{tg} x + 2 \cdot \cos x + 1 = 0$

b)  $3 \cdot \cos^3 x = \cos x$

d)  $\operatorname{tg} x = 2 \cdot \sin x$

f)  $3 \cdot \cot g^3 x + 3 \cdot \cot g^2 x - \cot g x - 1 = 0$

h)  $3 \cdot \cos x + 3 = 4 \cdot \cos^3 x + 4 \cdot \cos^2 x$

j)  $\sqrt{2} \cdot \cos x - \cot g x - \sqrt{2} \cdot \sin x + 1 = 0$

9. Riešte v R:

a)  $\sin x + \sin 2x = 0$

c)  $\sin 2x = (\cos x - \sin x)^2$

e)  $\sin^2 x \cdot \cos^2 x = 0,125$

g)  $\cos 2x + \sin x \cdot \cos x = 1$

i)  $(1 + \cos 2x) \cdot \sin x = 4 \cdot \cos^2 x$

b)  $\sin x - \sin 2x + 2 \cdot \cos x - 1 = 0$

d)  $(\sin x + \cos x)^2 = 1$

f)  $0,5 \cdot \sin^2 2x = \sin^4 x + \cos^4 x$

h)  $1 = \cos 2x - \sin x$

j)  $\sin^4 x - \cos^4 x = \cos^2 2x$

10. Riešte v R:

a)  $\sin 4x = \sin 2x$

c)  $\operatorname{tg} 3x - 2 \sin 6x = 0$

b)  $\sin 6x - 2 \cdot \cos 3x = 0$

d)  $\cos 4x = \cos 2x$

11. Riešte v R:

a)  $\sqrt{3} \cdot \sin \frac{x}{2} + \sin x = 0$

c)  $\cos \frac{x}{4} - \sin \frac{x}{2} = 0$

b)  $\sin \frac{x}{2} + \cos x = 1$

d)  $\sin \frac{x}{8} + \cos \frac{x}{4} = 0$

12. Riešte v R:

a)  $\sin 4x = \sin \left( 3x - \frac{\pi}{2} \right)$

c)  $\sin 3x = \cos \left( 0,5x + \frac{\pi}{2} \right)$

e)  $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$

b)  $\cos(x+1) = \cos(6x+2)$

d)  $\sin \frac{3}{2}x + \sin \frac{x}{2} = 0$

f)  $\cos x + \cos 3x + \cos 5x = 0$

13. Riešte v R:

a)  $\sin(x+30^\circ) + \sin(x-30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c)  $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = \sin 2x$

e)  $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = 1$

b)  $\cos(x+120^\circ) - \cos x = \sqrt{3}$

d)  $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right) = \sin x - \sin \frac{\pi}{6}$

f)  $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$

# ŠTANDARDY

## 5.7.1 Definovať goniometrické funkcie *sínus*, *kosínus*, *tangens* a *kotangens*, poznáť ich definíčné obory, obory hodnôt, grafy a periódy

- 1) Rozhodnite, či je funkcia  $f: y = \sin 2x$  ohraničená.
- 2) Daná je množina  $HGF = \left\{ \frac{2}{3}; 0,4; \frac{7}{5}; 1,5; -\frac{2}{3}; 1; -1; 0; -0,5 \right\}$ . Bez použitia uhlomera a tabuľiek zostrojte uhol  $\alpha$ , ak  
 a)  $\sin \alpha \in HGF$       b)  $\cos \alpha \in HGF$       c)  $\operatorname{tg} \alpha \in HGF$       d)  $\operatorname{cotg} \alpha \in HGF$

- 3) Dokážte, že platí:      a)  $\sin 20^\circ = \sin 740^\circ$       b)  $\cos 54^\circ = \cos(-1026^\circ)$   
 c)  $\sin 80^\circ = \sin(-1000^\circ)$       d)  $\cos(-1750^\circ) = \cos 50^\circ$   
 e)  $\operatorname{tg} 75^\circ = \operatorname{tg}(-105^\circ)$       f)  $\operatorname{cotg}(-541^\circ) = \operatorname{cotg} 359^\circ$

- 4). Daná je množina  $HGF = \left\{ 2; -0,45; \sqrt{4,1}; 0,8; -0,56; -5,6; 1,09; \sqrt{3}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$ .

- Ktorý z jej prvkov môže byť hodnotou funkcie:  
 a)  $y = \sin x$       b)  $y = \cos x$       c)  $y = \operatorname{tg} x$       d)  $y = \operatorname{cotg} x$ ?

- 5) Do ktorého z intervalov  $\left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle, \left\langle \frac{\pi}{2}; \pi \right\rangle, \left\langle \pi; \frac{3\pi}{2} \right\rangle, \left\langle \frac{3\pi}{2}; 2\pi \right\rangle$  patrí  $x$ , pre ktoré platí:  
 a)  $\sin x = 0,8$  a zároveň  $\cos x < 0$ ;  
 b)  $\sin x \leq 0$  a zároveň  $\cos x = -0,3$ ;  
 c)  $\operatorname{tg} x > 0$  a zároveň  $\sin x > 0$ ;  
 d)  $\operatorname{cotg} x < 0$  a zároveň  $\cos x > 0$ ;  
 e)  $\sin x < 0$  a zároveň  $\operatorname{cotg} x < 0$ ;  
 f)  $\operatorname{tg} x < 0$  a zároveň  $\cos x < 0$ .

## 5.7.2 Nájsť k danému argumentu funkčnú hodnotu a k danej funkčnej hodnote argument

- 1) Určte obor definície funkcie:

a)  $y = \frac{\sin x}{\sqrt{2} + 2 \cdot \cos x}$       b)  $y = \sqrt{\sin x \cdot \cos x}$       c)  $y = \operatorname{tg}(x + \pi)$       d)  $y = \operatorname{cotg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

- 2) Doplňte tabuľku:

	$x$					
	$45^\circ$	$-30^\circ$	$780^\circ$	$-315^\circ$	$453^\circ$	$-1210^\circ$
$\sin x$						
$\cos x$						
$\operatorname{tg} x$						
$\operatorname{cotg} x$						

- 3) Vypočítajte:

b)  $\operatorname{cotg} \frac{12}{8}\pi \cdot \operatorname{tg} 11\pi \cdot \operatorname{cotg} \frac{19}{3}\pi \cdot \operatorname{tg}(-7\pi)$

b) 
$$\frac{\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \cdot \operatorname{cotg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(-\frac{3}{2}\pi\right) \cdot \cos(-4\pi)}$$

- 4) Usporiadajte podľa veľkosti čísla:

a)  $\sin 60^\circ, \cos 60^\circ, \operatorname{tg} 60^\circ, \operatorname{cotg} 60^\circ$

b)  $\operatorname{tg} \frac{10}{3}\pi, \operatorname{cotg}\left(-\frac{2}{3}\pi\right), \sin(-3\pi), \cos 2\pi$

5) Určte v oblúkovej mieri všetky  $x$  vyhovujúce rovnici:

a)  $\sin x = a$ , pre  $a \in M = \left\{0, 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}, -2\right\}$

b)  $\cos x = a$ , pre  $a \in M = \left\{0, 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}, -2\right\}$

c)  $\operatorname{tg} x = a$ , pre  $a \in M = \left\{0, 1, -1, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\right\}$

d)  $\operatorname{cotg} x = a$ , pre  $a \in M = \left\{0, 1, -1, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\right\}$

### 5.7.3 Načrtaný graf goniometrickej funkcie tvaru $y = a.f(bx + c) + d$

1) V intervale  $\langle -\pi, 3\pi \rangle$  načrtnite grafy funkcií:

a)  $y = -\cos x$       b)  $y = 3 \cdot \sin x$       c)  $y = \sin x - 1$       d)  $y = 2 - \cos x$     e)  $y = \sin 2x$

f)  $y = 2 \cdot \cos x + 3$     g)  $y = \cos \frac{1}{2}x$       h)  $y = |\sin x|$

2) V intervale  $\langle -\pi, 3\pi \rangle$  načrtnite grafy funkcií:

a)  $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$       b)  $y = \sin\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right)$       c)  $y = 2 \cdot \cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\pi\right)$       d)  $y = \cos\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)$

e)  $y = 2 \cdot \cos\left(0,5x + \frac{\pi}{4}\right)$       f)  $y = 2 \cdot \cos\left(0,5x + \frac{\pi}{4}\right) - 1$       g)  $y = -0,5 \cdot \operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$

3) V intervale  $\langle -\pi, 3\pi \rangle$  načrtnite grafy funkcií:

a)  $y = 3 \cdot \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$     b)  $y = 4 \cdot \sin\left(3x - \frac{3}{8}\pi\right)$     c)  $y = \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{3}{2}x + \frac{1}{3}\pi\right)$     d)  $y = 2 \cdot \sin\left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\pi\right)$

**5.7.4 Aktívne ovládať vzorce:**  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ,  $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1$ ,

$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y,$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

1) Bez použitia tabuľiek i kalkulačky vypočítajte hodnoty ostatných goniometrických funkcií, ak:

a)  $\cos x = 0,6$ ;  $x \in \left(\frac{1}{2}\pi, \pi\right)$ ;      b)  $\sin x = \frac{12}{13}$ ;  $x \in \left(0, \frac{1}{2}\pi\right)$ ;

c)  $\operatorname{cotg} x = -\frac{3}{4}$ ;  $x \in \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$ ;      d)  $\operatorname{tg} x = \frac{4}{3}$ ;  $x \in \left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$ .

2) Bez použitia tabuľiek i kalkulačky určte:

a)  $\cos 75^\circ$       b)  $\sin 105^\circ$       c)  $\cos 15^\circ$       d)  $\sin \frac{1}{12}\pi$       e)  $\sin 2x$ , ak  $\sin x = \frac{2}{3}$

f)  $\cos 2x$ , ak  $\cos x = -0,8$       g)  $\sin(x+y)$ , ak  $\sin x = \frac{12}{13}$  a  $\sin y = \frac{4}{5}$

3) Upravte:

a)  $\sin^2 x + \cos^2 x + \operatorname{tg}^2 x$       b)  $\frac{1}{1+\sin x} + \frac{1}{1-\sin x}$       c)  $\frac{\operatorname{tg} x \cdot \cos^2 x}{1-\cos^2 x}$       d)  $\frac{1-\cos 2x + \sin 2x}{1+\cos 2x + \sin 2x}$