

Program merytoryczny Olimpiady Matematycznej Juniorów

Poniższe zestawienie zawiera przegląd pojęć matematycznych, których znajomość oczekiwana jest od uczestników Olimpiady Matematycznej Juniorów. Przy niektórych pojęciach wskazane są również podstawowe umiejętności związane z ich stosowaniem. Do rozwiązania zadań olimpijskich służyć mogą także rezultaty nie wskazane w poniższym zestawieniu a dotyczące wymienionych niżej pojęć. Część z nich znaleźć można w zestawieniu polecanej literatury zamieszczonym na stronie internetowej OMJ oraz w szkicach rozwiązań zadań z poprzednich edycji OMJ.

Komitety Główny OMJ

Operacje i wyrażenia algebraiczne

Składnik, suma, różnica, odjemna, odjemnik, różnica, czynnik, iloczyn, dzielna, dzielnik, iloraz. Jednomian, suma algebraiczna, wyrażenie algebraiczne, zmienna. Zapisywanie zależności przedstawionych w zadaniach w postaci wyrażeń algebraicznych jednej lub kilku zmiennych. Wartość liczbową wyrażenia algebraicznego. Dodawanie, odejmowanie i mnożenie sum algebraicznych. Redukcja wyrazów podobnych. Rozkładanie sum algebraicznych na czynniki, wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias. Skrócone sposoby mnożenia, m.in. wzory:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \quad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Liczby całkowite

Liczby naturalne w dziesiętnym systemie pozycyjnym. Cyfra jedności, dziesiątek, setek, tysięcy itd. Liczby całkowite. Liczby dodatnie i ujemne. Znak liczby całkowitej. Podzielność liczb całkowitych, dzielniki i wielokrotności. Liczby parzyste i nieparzyste. Liczby pierwsze. Rozdzielanie liczb całkowitych na czynniki. Przykłady cech podzielności związane z zapisem w dziesiętnym systemie pozycyjnym, np. cechy podzielności przez 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 25, 100. Potęgi liczb całkowitych o wykładniku naturalnym i ich związek z cechami podzielności. Dzielenie z resztą liczb całkowitych przez liczby całkowite niezerowe. Największy wspólny dzielnik (NWD) i najmniejsza wspólna wielokrotność (NWW) liczb całkowitych. Związek pomiędzy resztą z dzielenia przez daną liczbę całkowitą niezerową sumy/iloczynu liczb naturalnych z sumą/iloczynem reszt z dzielenia przez tę liczbę poszczególnych składników/czynników (np. parzystość sumy/iloczynu liczb całkowitych w zależności od liczby i parzystości składników/czynników).

Liczby wymierne, proporcjonalność i obliczenia procentowe

Ułamki dziesiętne. Dodawanie i odejmowanie ułamków dziesiętnych. Mnożenie i dzielenie ułamków dziesiętnych przez 10, 100, 1000 itd. Porównywanie ułamków dziesiętnych. Przedstawianie ilorazu w postaci ułamka zwykłego; licznik, mianownik, kreska ułamkowa. Skracanie i rozszerzanie ułamków. Ułamki nieskracalne. Sprowadzanie ułamków do wspólnego mianownika. Dodawanie i odejmowanie ułamków zwykłych. Mnożenie i dzielenie ułamków zwykłych przez liczbę naturalną. Ułamki danej liczby naturalnej. Porównywanie ułamków zwykłych. Zamiana ułamków dziesiętnych na ułamki zwykłe i przykłady działania odwrotnego. Rozwinięcia dziesiętne ułamków zwykłych, ułamki okresowe. Liczby wymierne. Suma, różnica, iloraz i iloczyn liczb wymiernych.

Proporcjonalność prosta, współczynnik proporcjonalności. Proporcjonalność odwrotna. Procent, obliczenia procentowe, obliczanie procentu danej liczby oraz liczby na podstawie danego jej procentu. Wykonywanie obliczeń dotyczących jednokrotnej podwyżki lub obniżki wielkości o dany procent, a także wielokrotnych podwyżek i obniżek wielkości o dany procent.

Potęgowanie i pierwiastkowanie. Liczby niewymierne

Podstawa i wykładnik potęgowania. Mnożenie i dzielenie potęg o tej samej podstawie. Mnożenie i dzielenie potęg o tym samym wykładniku. Potęgowanie potęgi. Pierwiastki. Stopień pierwiastka. Mnożenie i dzielenie pierwiastków tego samego stopnia. Wylączanie czynnika przed znak pierwiastka. Włączanie liczby pod znak pierwiastka. Przekształcanie wyrażeń zawierających potęgi i pierwiastki. Odczytywanie i zapisywanie liczby w notacji wykładniczej. Szacowanie wielkości danego pierwiastka lub wyrażenia arytmetycznego zawierającego pierwiastki, porównywanie wartości wyrażenia arytmetycznego zawierającego pierwiastki z daną liczbą wymierną oraz znajdowanie liczby wymiernej większej lub mniejszej od takiego wyrażenia arytmetycznego.

Liczby niewymierne. Charakteryzacja liczb naturalnych, których pierwiastki są liczbami niewymiernymi. Wyciąganie niewymierności z mianownika. Zachowywanie się własności wymierności i niewymierności przy dodawaniu i mnożeniu liczb. Rozwinięcie dziesiętne liczby niewymiernej. Zaokrąglanie liczby zapisanej w systemie dziesiętnym zadaną dokładnością.

Liczby rzeczywiste i układ współrzędnych

Liczby rzeczywiste i ich przedstawienie na osi liczbowej. Znak liczby rzeczywistej. Liczby przeciwne. Liczby wzajemnie odwrotne. Wartość bezwzględna liczby rzeczywistej. Interpretacja wartości bezwzględnej na osi liczbowej. Porównywanie liczb rzeczywistych. Średnia arytmetyczna i geometryczna. Znak sumy i iloczynu liczb rzeczywistych. Równania i nierówności z jedną niewiadomą ich interpretacja na osi liczbowej. Dodawanie do obu stron równania lub nierówności tego samego wyrażenia, mnożenie i dzielenie obu stron przez tę samą liczbę. Dodawanie i mnożenie stronami równości i nierówności.

Prostokątny układ współrzędnych. Osie i początek układu. Określenie położenia punktów o danych współrzędnych całkowitych i wymiernych na płaszczyźnie. Wyróżnianie zbiorów punktów w układzie współrzędnych za pomocą równań, nierówności lub innych własności współrzędnych. Punkty kratowe.

Równania z wieloma niewiadomymi i ich zbiory rozwiązań. Układy równań. Rozwiązania układów równań. Sprawdzanie czy dany układ liczb jest rozwiązaniem. Interpretacja geometryczna zbioru rozwiązań w prostokątnym układzie współrzędnych. Zadania tekstowe prowadzące do równań czy nierówności.

Geometria płaska

Punkt. Odcinek. Środek i końce odcinka. Łamana otwarta i zamknięta. Prosta i półprosta. Kąt, ramiona i wierzchołek. Jednostki miary kąta. Kąt ostry, rozwarty, prosty. Kąt wypukły, wklęsły, pełny i półpełny. Porównywanie kątów. Odcinki równoległe, odcinki prostopadłe. Proste równoległe i prostopadłe. Kąty wierzchołkowe i przyległe. Dopełnienie kąta. Dwusieczna kąta.

Odległość punktów na płaszczyźnie. Odległość punktu od prostej. Długość łamanej. Okrąg i koło, środek, promień, średnica, cięciwa i łuk. Kąt środkowy, kąt wpisany. Związek między kątem środkowym i kątem wpisanym opartych na tym samym łuku okręgu. Kąt wpisany oparty na półokręgu. Prosta styczna do okręgu. Obwód i pole koła. Liczba π .

Wielokąt, trójkąt, czworokąt, trapez, równoległobok, prostokąt, romb, kwadrat, deltoid. Boki i obwód wielokąta. Kąt wewnętrzny i zewnętrzny w wielokącie. Wielokąty wypukłe i wklęsłe. Trójkąt ostrokątny, prostokątny i rozwartokątny. Twierdzenie Pitagorasa i twierdzenie odwrotne. Nierówność trójkąta i jej zastosowania. Wysokość trójkąta, wysokość równoległoboku, wysokość trapezu. Pole prostokąta, trójkąta, równoległoboku i trapezu. Pole wielokąta. Jednostki pola.

Suma miar kątów wewnętrznych trójkąta. Środkowa i środek ciężkości w trójkącie. Okrąg wpisany i opisany na wielokącie. Środek okręgu wpisanego i środek okręgu opisanego na trójkącie. Kryteria wpisalności i opisywalności okręgu na czworokącie wypukłym. Suma miar kątów wewnętrznych wielokąta wypukłego. Przekątna wielokąta. Charakteryzacje równoległoboków w zbiorze wszystkich czworokątów. Liczba przekątnych w wielokątach wypukłych. Wielokąty foremne.

Przystawianie figur. Cechy przystawiania trójkątów. Figury symetryczne względem prostej, oś symetrii. Oś symetrii figury, symetralna odcinka. Figury symetryczne względem punktu, środek symetrii. Środek symetrii figury. Środek i osie symetrii wielokąta foremnego. Proporcjonalność odcinków utworzonych na ramionach kąta przeciętych prostymi równoległymi (twierdzenie Talesa). Powiększanie i pomniejszanie figur geometrycznych w danej skali. Jednokładność figur, środek i skala jednokładności. Figury podobne, skala podobieństwa. Stosunek pól figur podobnych. Cechy podobieństwa trójkątów. Obrót dookoła punktu na płaszczyźnie. Rzut punktu na prostą.

Geometria w przestrzeni

Punkty, odcinki, proste i płaszczyzny w przestrzeni. Proste skośne, kąt między prostymi skośnymi. Prostopadłość prostej i płaszczyzny. Rzut punktu, prostej i płaszczyzny na płaszczyznę. Kąt prostej z płaszczyzną. Kąt dwuścienny i jego miara. Prostopadłość dwóch płaszczyzn.

Wielościan, czworościan, sześcián, prostopadłościan, równoległościan, graniastosłup, ostrosłup. Ściany, krawędzie i wierzchołki. Krawędzie i ściany równoległe, krawędzie skośne, krawędzie i ściany prostopadłe. Graniastosłup i ostrosłup prosty lub prawidłowy. Podstawa i ściany boczne graniastosłupa i ostrosłupa. Wysokość ostrosłupa i graniastosłupa.

Obliczanie pól powierzchni i objętości graniastosłupów i ostrosłupów. Jednostki objętości. Bryły obrotowe: walec, stożek i kula. Rozwinięcie powierzchni walca i stożka na płaszczyźnie. Wysokość walca i stożka. Wzory na obliczanie pól powierzchni i objętości walca, stożka i kuli. Siatka wielościanu. Przekroje wielościanów i brył obrotowych płaszczyzną. Powierzchnia styczna do kuli. Kula wpisana i opisana na wielościanie.

Elementy kombinatoryki i teorii zbiorów

Zbiór i podzbiór. Elementy zbioru. Zbiór pusty. Suma i część wspólna zbiorów. Zbiory rozłączne. Liczba elementów zbioru. Liczba podzbiorów zbioru. Podzbiór o maksymalnej lub minimalnej liczbie elementów. Rozbicie zbioru na podzbiory rozłączne. Zasada szufladkowa Dirichleta. Pary i trójki elementów. Reguła dodawania i reguła mnożenia. Interpretacja warunków podanych w zadaniach tekstowych w języku zbiorów i relacji między nimi (np. zbiór rozwiązań równania czy nierówności, zbiór znajomych, graczy, zawodników czy też zbiór punktów o danym kolorze). Interpretacja graficzna warunków podanych w zadaniach tekstowych (np. graf znajomości). Podzbiory zbioru liczb naturalnych, całkowitych, wymiernych i rzeczywistych. Największy i najmniejszy element zbioru.